

Das aeroelastische System „Flügel mit Triebwerken“ als Funktion der aerodynamischen Modellbildung

W. Send, R. Voß, W. Wegner

Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt e.V.
(DLR)
Institut für Aeroelastik, Göttingen

Zusammenfassung

Die Lagrangesche Bewegungsgleichung mit den eingepprägten Fluidkräften ist Schnittstelle zwischen dem mechanischen Modell „Flügel mit Triebwerken“ und der aerodynamischen Modellbildung. Zu ausgewählten Schwingungsformen (Biegung, Torsion) werden die generalisierten Kräfte für den Flügel dargestellt in aufsteigender Komplexität der Strömungsberechnung. Die Ergebnisse stammen aus subsonischen und transsonischen potentialtheoretischen Verfahren und aus Eulerrechnungen.

Die Auftragungen der generalisierten Kräfte über der reduzierten Frequenz zu gegebener Machzahl sind grundlegend für die Beurteilung der aerodynamischen Modelle untereinander wie für deren Einfluß auf das mechanische System. Das kinematische Modell des Flügels mit Triebwerken wird beschrieben und hinsichtlich der verschiedenen Stufen der Linearisierung diskutiert. Die Verwendung der Grundharmonischen und der linearisierten Lagrangeschen Gleichung für die klassische Flatteranalyse wird im Rahmen der Modellbildung als ein Grenzfall dargestellt.

1. EINLEITUNG

Die Entwicklung neuer Verkehrsflugzeuge mit großen Spannweiten und zunehmend größeren Triebwerkdurchmessern verlangt bereits im Frühstadium die Einbeziehung des aeroelastischen Verhaltens. Wesentliche Beiträge hierzu liefern moderne Berechnungsverfahren der instationären Aerodynamik. Hochleistungsrechner bieten die Aussicht, die instationäre Umströmung komplexer Konfigurationen wie die eines schwingenden Flügels mit Triebwerken auch in transsonischer Strömung beschreiben zu können, und liefern hierdurch genauere Aussagen zur Stabilität des aeroelastischen Systems „Flügel mit Triebwerken“.

Die rechnerisch zu beherrschende Aufgabe sieht sich Forderungen nach zunehmender Komplexität in drei Hauptrichtungen gegenüber:

- Flügelgeometrie mit Winglets, Triebwerkemantel, Pylon, Vorflügel und Klappen,
- Beschreibung der Struktur (Massenverteilung, Laständerung in den Treibstofftanks, FE-Modelle für elastische Flügeloberfläche mit vielen Freiheitsgraden) und
- Physik der Umströmung (Transsonik, Reibung und Ablösung, Laminarerhaltung, Interferenzwirkungen, Einfluß des Triebwerkstrahls).

Für eine Bewertung der Fortschritte in den einzelnen Richtungen wird als wichtig angesehen, deren Einfluß auf das Gesamtsystem kontrollieren und vergleichen zu können. Die Lagrangesche Bewegungsgleichung mit L als Lagrangefunktion für kinetische und potentielle Energie

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \right) = - Q_k \quad (1)$$

mit den Freiheitsgraden q_k und den eingepprägten Fluidkräften Q_k ist die theoretische Grundlage. Zu ausgewählten Schwingungsformen (Biegung, Torsion) werden die generalisierten Kräfte Q_k für den Flügel hergeleitet, berechnet und dargestellt in aufsteigender Komplexität der Strömungsberechnung. Die Ergebnisse stammen aus subsonischen und transsonischen potentialtheoretischen Verfahren und aus Eulerrechnungen. Die Auftragungen der generalisierten Kräfte über der reduzierten Frequenz ω^* zu gegebener Machzahl Ma sind grundlegend für die Beurteilung der aerodynamischen Modelle untereinander wie für deren Einfluß auf das mechanische System (die „linke“ Seite in der Lagrangeschen Gleichung).

Damit wird zugleich der Grundstein gelegt für Untersuchungen, bei denen die volle Zeitabhängigkeit der transsonischen Luftkräfte gekoppelt werden soll mit der nicht mehr linearisierten Lagrangeschen Gleichung (Zielsetzung des DLR-Projektes CASWING).

2. GEOMETRIE DES PFEILFLÜGELS

Gegeben sei die Oberfläche S_W des Flügels (Halbflügel) im Bezugssystem B_W mit den Koordinaten (x_W, y_W, z_W) . Das System ist zur Anströmung ausgerichtet und die Vorderkante der Flügelwurzel liegt definitionsgemäß bei $x_W = 0$ (Bild 1). Folgende Bezeichnungen werden für die wesentlichen geometrischen Größen des Flügels und der Gesamtflügelfläche verwendet:

s	Halbspannweite
S_W	Oberfläche des Halbflügels
η	Relative örtliche Spannweite $\eta = y_W/s$
$l(\eta)$	Örtliche Flügeltiefe
A_W	Grundrißfläche $A_W = s \int_0^1 l(\eta) d\eta$
l_M	Mittlere Flügeltiefe $l_M = \frac{s}{A_W} \int_0^1 l^2(\eta) d\eta$
D_F	Rumpfdurchmesser
b	Gesamtspannweite $b = D_F + 2s$
A	Gesamtgrundrißfläche $A = 2A_W$
λ	Seitenverhältnis $\lambda = b^2/A$
φ_T	Pfeilung der 1/4-Linie
l_t	Flügeltiefe an der Spitze $l_t = l(1)$
l_r	Flügeltiefe an der Wurzel $l_r = l(0)$
λ_T	Verjüngung (Zuspitzung) des Flügels
l_{rT}	Flügeltiefe des Basistrapezes $l_{rT} = l_t/\lambda_T$
d_t	x_W -Abstand der Vorderkante der Flügelspitze von der y_W -Achse
φ_{LE}	Pfeilung der Flügelvorderkante

In diesem Bezugssystem lautet die Darstellung der Oberfläche S_W :

$$\begin{bmatrix} x_{WS}(\xi, \eta) \\ y_{WS}(\eta) \\ z_{WS}(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{LE}(\eta) + l(\eta) x_p(\xi, \eta) \\ \eta s \\ z_{LE}(\eta) + l(\eta) z_p(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Mit $(x_{LE}(\eta), z_{LE}(\eta))$ wird die örtliche Lage der Vorderkante festgelegt. Der jeweilige Profilquerschnitt $(x_p(x, \eta), z_p(x, \eta))$ ist normiert auf die Profiltiefe 1. Ist die Oberfläche in der beschriebenen Weise definiert, dann sind die voranstehenden geometrischen Größen dadurch festgelegt. Sie kennzeichnen den jeweiligen Flügel und das Auftriebssystem des Flugzeugs.

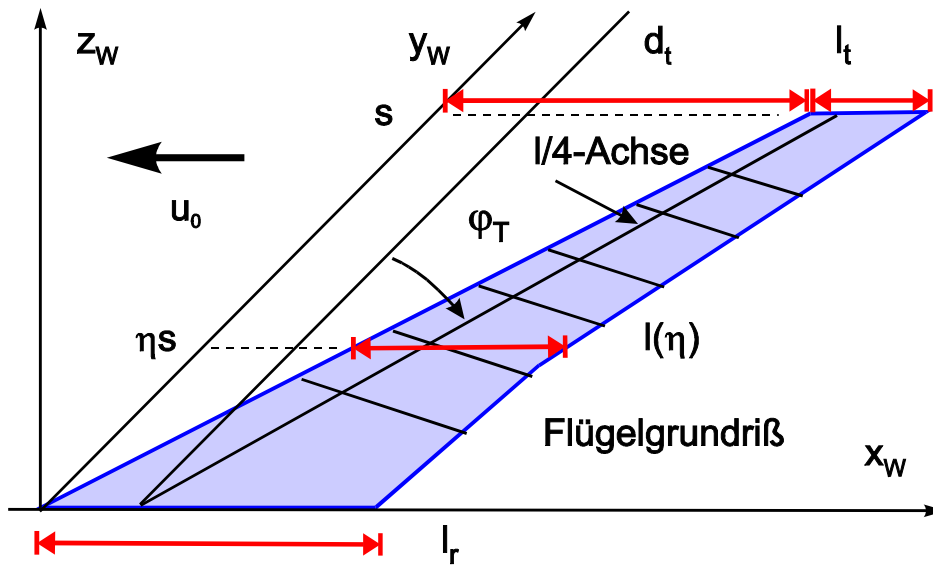


Bild 1 Bezugssystem B_W für Flügelgeometrie

Variationen eines gegebenen Flügels und der Entwurf einer Testgeometrie werden mit voranstehenden Bezeichnungen vorgenommen. Für komplexe Flügelgrundrisse werden weitere geometrische Angaben benötigt (siehe Bild 2).

Für die Lage der Triebwerk gondeln ergibt sich eine ähnliche Beschreibung wie für die eigentliche Flügel fläche. Die Oberfläche S_E einer beliebigen Gondel wird dargestellt durch:

$$\begin{bmatrix} x_{WE}(\xi, \eta_E, \tau) \\ y_{WE}(\xi, \eta_E, \tau) \\ z_{WE}(\xi, \eta_E, \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{LE}(\eta_E) + x_{PE} + l_E x_E(\xi, \tau) \\ \eta_E s + (l_E z_E(\xi, \tau) + d_E / 2) \sin \tau \\ z_{LE}(\eta_E) + z_{PE} + (l_E z_E(\xi, \tau) + d_E / 2) \cos \tau \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Mit (x_{PE}, z_{PE}) wird die relative Position der Vorderkante der Gondelachse gegenüber der örtlichen Vorderkante festgelegt. Sind die Triebwerke vor und unterhalb der Tragfläche angebracht, dann sind beide Zahlen negativ. Mit l_E ist die Länge der Gondel, mit d_E der Durchmesser an der Vorderkante bezeichnet. Der Profilquerschnitt (x_E, z_E) mit ist normiert auf die Profiltiefe 1.

3. NÄHERUNG DER BIEGEACHSE

Die Biegeachse ist eine geradlinige Approximation der elastischen Achse, deren Lage im Bezugssystem B_W vorgegeben wird. Ihr Pfeilwinkel φ unterscheidet sich in der Praxis nur geringfügig vom Pfeilwinkel der 1/4-Linie. Die weiteren Bezeichnungen ergeben sich aus Bild 2 und sind nachfolgend zusammengestellt:

e_r	x_W -Abstand der Vorderkante der Flügel von der Biegeachse an der Wurzel
e_t	x_W -Abstand der Vorderkante des Flügel von der Biegeachse an der Spitze
φ	Pfeilung der Biegeachse
ψ	V-Stellung der Biegeachse

Durch die Biegeachse wird ein neues Bezugssystem B^* definiert, das im weiteren Verlauf die Rolle des flügelfesten Bezugssystems übernimmt. Die Bezugsachse der Pfeilung φ (Biegeachse) liefert die Koordinate y^* . Die beiden weiteren Koordinatenachsen x^* und z^* sind offenkundig. Eine V-Stellung der Flügelgeometrie um den Winkel ψ wird über einen konstanten Anteil am Biegewinkel einbezogen (siehe Bild 4).

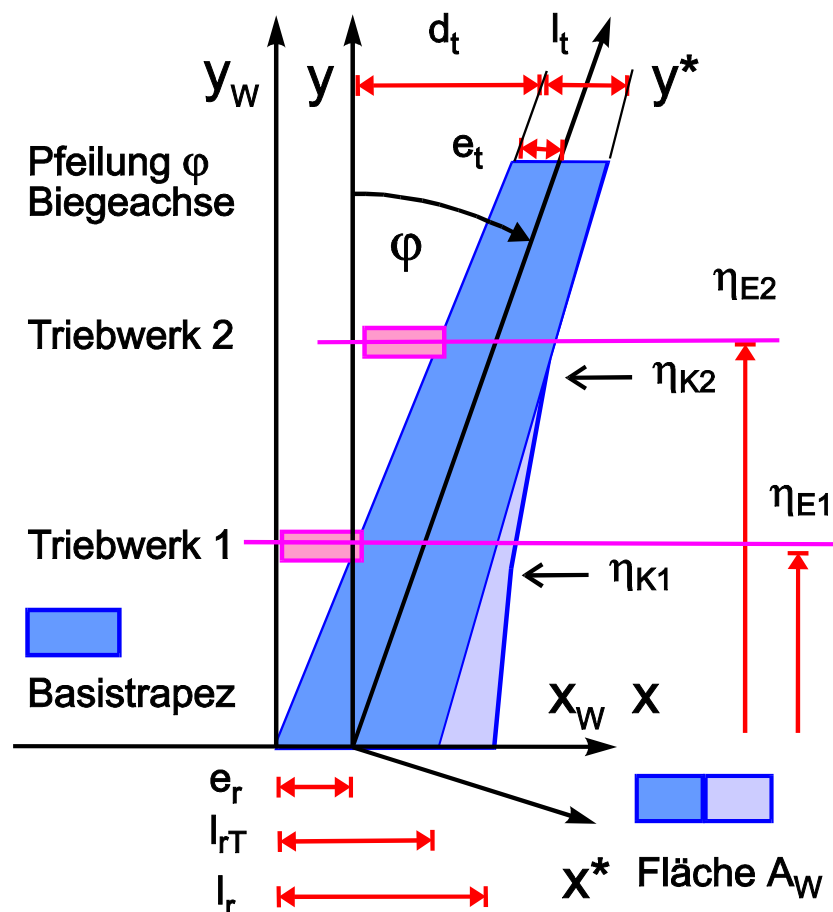


Bild 2 Grundrißdaten und Biegeachse

Zwischen B_W und B^* liegt das Bezugssystem B mit den Koordinaten (x, y, z) , das sich von B_W nur um die Verschiebung e_r zur Biegeachse hin unterscheidet. Zu festem $y_W=y=y_0$ lautet die Beziehung zwischen den Koordinaten der beiden Bezugssysteme:

$$\begin{aligned}x^* &= x \cos \varphi - y_0 \sin \varphi \quad \text{mit} \quad x = x_W - e_r \\y^* &= \sin \varphi x + y_0 \cos \varphi \\z^* &= z_W\end{aligned}\tag{3}$$

Es sei hervorgehoben, daß hiermit der nicht ausgelenkte Flügel im Ruhezustand beschrieben ist. Wird die Kinematik einer Triebwerksgondel gesucht, dann sind für (x_W, y_W, z_W) die entsprechenden Formeln aus (2.2) einzusetzen.

4. KINEMATIK FÜR TORSION UND BIEGUNG

Als Freiheitsgrade der Bewegung werden Biegung und Torsion untersucht. Um die Herleitung der Beziehungen formelmäßig gut begründen zu können, wird von einer Starrkörperbewegung ausgegangen. Die „Biegung“ ist dann zunächst eine Drehung $\vartheta(t)$, und die „Torsion“ eine Drehung $\alpha(t)$. Späterhin können beide Funktionen als abhängig von der Spannweite angenommen werden durch $\vartheta(\eta, t)$ und $\alpha(\eta, t)$.

Die Biegung erfolgt längs der durch die Pfeilung φ gegebenen Achse, die Torsion um die gleiche Achse (Bild 3). Hierauf beziehen sich die nachfolgenden Formeln. Andere Torsionsachsen liefern veränderte Formelsätze. Als Bezeichnungen sind eingeführt:

u_0	Translatorische Grundgeschwindigkeit
$\vartheta(\eta, t)$	Biegefunktion
$\alpha(\eta, t)$	Torsionsfunktion
\mathbf{v}_{kin}	Geschwindigkeit der Oberfläche im raumfesten Bezugssystem B
U_{kin}	Komponenten von \mathbf{v}_{kin}
V_{kin}	
W_{kin}	
$\mathbf{v}_{\text{kin}}^*$	Geschwindigkeit der Oberfläche im flügelfesten Bezugssystem B^*
U_{kin}^*	Komponenten von $\mathbf{v}_{\text{kin}}^*$
V_{kin}^*	
W_{kin}^*	
(x, y, z)	Koordinaten im Bezugssystem B
\mathbf{x}	Koordinatenvektor zu (x, y, z)
\mathbf{x}^*	Koordinatenvektor zu (x^*, y^*, z^*)

Die Koordinaten (x^*, y^*, z^*) sind fest mit der Flügeloberfläche verbunden. Das Bezugssystem B_W übernimmt somit gewissermaßen die Rolle des mit einem Windkanal fest verbundenen Systems.

In Bild 3 sind symbolisch zwei Meßpunkte eingezeichnet, die feste Punkte auf der Flügeloberfläche darstellen. Die Bewegung eines solchen, beliebig auf der Oberfläche wählbaren, Meßpunktes (Index „m“) im Bezugssystem B ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
 x(t, x_m^*, z_m^*; y_0) &= \sin \vartheta(t) \sin \varphi (-\sin \alpha(t) x_m^* + \cos \alpha(t) z_m^*) \\
 &+ \sin \alpha(t) \cos \varphi z_m^* + (\cos \alpha(t) - \cos \vartheta(t)) \cos \varphi x_m^* \\
 &+ \cos \vartheta(t) \left(\tan \varphi y_0 + \frac{1}{\cos \varphi} x_m^* \right) \\
 y(t, x_m^*, z_m^*; y_0) &= \sin \vartheta(t) \cos \varphi (-\sin \alpha(t) x_m^* \\
 &+ \cos \alpha(t) z_m^*) - \sin \alpha(t) \sin \varphi z_m^* - (\cos \alpha(t) \\
 &- \cos \vartheta(t)) \sin \varphi x_m^* + \cos \vartheta(t) y_0 \\
 z(t, x_m^*, z_m^*; y_0) &= -\cos \vartheta(t) \sin \alpha(t) x_m^* \\
 &+ \cos \alpha(t) \cos \vartheta(t) z_m^* - \sin \vartheta(t) \left(\frac{y_0}{\cos \varphi} + \tan \varphi x_m^* \right).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Die voranstehenden und nachfolgenden Gleichungen beruhen auf Transformationsformeln, die bei W. Send [1] zu finden sind. Durch Ableitung nach der Zeit t erhält man die Geschwindigkeit \mathbf{v}_{kin} im jeweiligen Meßpunkt:

$$\mathbf{v}_{\text{kin}}(t, x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right)_{x^*, y^*, z^*} \tag{5}$$

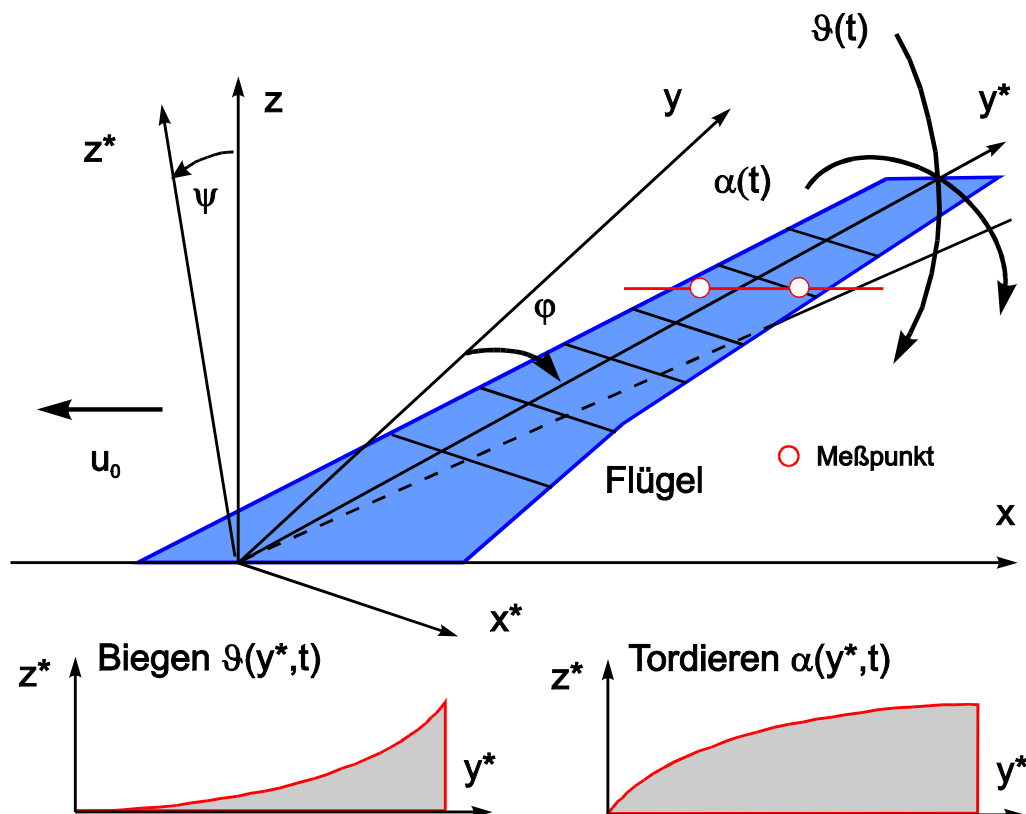


Bild 3 Kinematik von Biegung und Torsion

Auf diese Weise sind nachfolgend die Geschwindigkeitskomponenten angegeben. Für (x, y, z) sind dann die Beziehungen aus (4) zu verwenden. In diese wiederum gehen die

Koordinaten für einen festen Punkt (x^*, y^*, z^*) auf der Oberfläche ein. Zwischen y^* und x^* besteht im Flügelschnitt y_0 der Zusammenhang

$$y^* = \frac{y_0}{\cos \varphi} + x^* \tan \varphi. \quad (6)$$

Für \mathbf{v}_{kin} folgt sodann:

$$\begin{aligned} u_{\text{kin}} &= \sin \vartheta(t) \dot{\alpha}(t) y + \sin \varphi \dot{\vartheta}(t) z + \cos \varphi \cos \vartheta(t) \dot{\alpha}(t) z - u_0 \\ v_{\text{kin}} &= -\sin \vartheta(t) \dot{\alpha}(t) x - \sin \varphi \cos \vartheta(t) \dot{\alpha}(t) z + \cos \varphi \dot{\vartheta}(t) z \\ w_{\text{kin}} &= -(\cos \varphi x - \sin \varphi y) \cos \vartheta(t) \dot{\alpha}(t) - (\sin \varphi x + \cos \varphi y) \dot{\vartheta}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

In der voranstehenden Form sind die Oberflächenorte und -geschwindigkeiten geeignet zur Darstellung der Schwingungsformen und zu Lösungen des Umströmungsproblems mit numerischen Verfahren, die auf der Diskretisierung des umgebenden Raums beruhen (z.B. Eulerrechnungen). Für Integralverfahren und für die Berechnung der generalisierten Kräfte ist es zweckmäßig, die kinematischen Geschwindigkeiten auch im flügelfesten Bezugssystem B^* zu kennen. Diese lauten:

$$\begin{aligned} u_{\text{kin}}^* &= -(u_0 \sin \vartheta(t) \sin \varphi + \dot{\vartheta}(t) y^*) \sin \alpha(t) + \cos \alpha(t) \cos \varphi u_0 - \dot{\alpha}(t) z^* \\ v_{\text{kin}}^* &= +(\sin \alpha(t) x^* - \cos \alpha(t) z^*) \dot{\vartheta}(t) + \cos \vartheta(t) \sin \varphi u_0 \\ w_{\text{kin}}^* &= +(u_0 \sin \vartheta(t) \sin \varphi + \dot{\vartheta}(t) y^*) \cos \alpha(t) + \sin \alpha(t) \cos \varphi u_0 + \dot{\alpha}(t) x^* \end{aligned} \quad (8)$$

Der wesentliche Unterschied zur Kinematik des ungepfeilten Flügels liegt in der zusätzlichen Drehung des Flügelschnitts aufgrund der Biegung, diese ist im Term $\dot{\vartheta}(t) \sin \varphi + \dot{\vartheta}(t) x^* \tan \varphi$ enthalten, wobei in (8) zuvor y^* aus (6) einzusetzen ist. Dieser Effekt stellt sich bereits bei einer Starrkörperbewegung ein. Die Ursache liegt darin, daß die Bewegung der Flügeloberfläche im Flügelschnitt y_0 kein formtreues Abbild der Kontur mehr liefert.

Zur Bedeutung der flügelfesten Koordinaten sei noch eine Bemerkung angeschlossen: In einem Fluid sind Lagrangesche und Eulersche Koordinaten anfänglich in Übereinstimmung. Die ersteren dienen dabei der *Markierung* der Fluidpartikel. Vermittels des sich entwickelnden Geschwindigkeitsfeldes werden sodann die Bahnen der Materiepunkte bestimmt. Hier ist es ähnlich. Die Oberfläche ist *markiert* durch (x^*, y^*, z^*) , und das kinematische Geschwindigkeitsfeld beschreibt die zeitliche Entwicklung der Oberfläche. Während im Fluid sich das Geschwindigkeitsfeld aus den Erhaltungsgleichungen bestimmt, findet sich das kinematische Geschwindigkeitsfeld als Lösung der zugehörigen Lagrangeschen Gleichung. Die aeroelastische Kopplung verbindet die Lösung für die Kinematik der Oberfläche mit der simultanen Lösung des Umströmungsproblems für das umgebende Fluid.

Der zeitlichen Entwicklung der Oberfläche sind - bei Einbeziehung der durch die Struktur des Körpers gegebenen Gegenkräfte - prinzipiell keine Grenzen gesetzt. Es treten sowohl Flächendivergenz wie Flächenrotation auf, also Stauchungen, Dehnungen und Verdrehungen. Für das Studium der Vorgänge bei der aeroelastischen Kopplung ist es aber vernünftig, sich zunächst auf so wenig Freiheitsgrade der Bewegung zu beschränken, wie unumgänglich notwendig sind. Diese sind die hier beschriebene Biegung zusammen mit der Torsion, da von ihnen erfahrungsgemäß schon wesentliche Aussagen für die Stabilität der Konfiguration Flügel mit Triebwerken zu erwarten sind.

5. LINEARISIERUNG DER BEWEGUNG

Die Winkelfunktionen enthalten einen stationären und einen instationären Anteil

$$\vartheta(t) = \vartheta_s + \vartheta_1(t) \text{ und } \alpha(t) = \alpha_s + \alpha_1(t) .$$

Die Kinematik wird für kleine instationäre Anteile linearisiert durch

$$\sin \alpha(t) = \sin \alpha_s + \cos \alpha_s \alpha_1(t) , \quad \cos \alpha(t) = \cos \alpha_s - \sin \alpha_s \alpha_1(t) . \quad (9)$$

Entsprechendes gilt für ϑ . In dieser Form ist die Kinematik geeignet zur Lösung des Umströmungsproblems im Frequenzbereich. Die Linearisierung gilt in gleicher Weise für die Ortsdarstellung der Meßpunkte.

Auch in der linearisierten Form enthalten obige Gleichungen noch Terme höherer Ordnung. Produkte aus den zeitabhängigen Funktionen werden vernachlässigt. In der soweit linearisierten Form (Index „L“) folgt für das ruhende Bezugssystem:

$$\begin{aligned} u_{\text{kin}}^L &= \sin \vartheta_s \dot{\alpha}_1(t) y + \sin \varphi \dot{\vartheta}_1(t) z + \cos \varphi \cos \vartheta_s \dot{\alpha}_1(t) z - u_0 \\ v_{\text{kin}}^L &= -\sin \vartheta_s \dot{\alpha}_1(t) x - \sin \varphi \cos \vartheta_s \dot{\alpha}_1(t) z + \cos \varphi \dot{\vartheta}_1(t) z \\ w_{\text{kin}}^L &= -(\cos \varphi x - \sin \varphi y) \cos \vartheta_s \dot{\alpha}_1(t) - (\sin \varphi x + \cos \varphi y) \dot{\vartheta}_1(t) \end{aligned} \quad (10)$$

Für die linearen Anteile in der instationären Bewegung im flügelfesten Bezugssystem folgt:

$$\begin{aligned} u_{\text{kin}}^{*L} &= -(\sin \alpha_s \cos \varphi + \cos \alpha_s \sin \vartheta_s \sin \varphi) u_0 \dot{\alpha}_1(t) - \dot{\alpha}_1(t) z^* \\ &\quad - \sin \alpha_s \cos \vartheta_s \sin \varphi u_0 \dot{\vartheta}_1(t) - \sin \alpha_s \left(\frac{y_0}{\cos \varphi} + \tan \varphi x^* \right) \dot{\vartheta}_1(t) \\ v_{\text{kin}}^{*L} &= -\sin \vartheta_s \sin \varphi u_0 \dot{\vartheta}_1(t) + (\sin \alpha_s x^* - \cos \alpha_s z^*) \dot{\vartheta}_1(t) \end{aligned} \quad (11)$$

$$w_{\text{kin}}^{*L} = +(\cos\alpha_s \cos\varphi - \sin\alpha_s \sin\vartheta_s \sin\varphi) u_0 \alpha_1(t) + \dot{\alpha}_1(t) x^* \\ + \cos\alpha_s \cos\vartheta_s \sin\varphi u_0 \vartheta_1(t) + \cos\alpha_s \left(\frac{y_0}{\cos\varphi} + \tan\varphi x^* \right) \dot{\vartheta}_1(t)$$

6. ELASTISCHE DEFORMATION

Die bisherige Darstellung geht von einer Starrkörperbewegung des Flügels aus. Die elastische Deformation kann in diesem Modell dadurch eingeführt werden, daß beide Winkel spannenweitenabhängig definiert werden. Für Biegung $\vartheta(\eta, t)$ und Torsion $\alpha(\eta, t)$ sind entsprechende Formfunktionen anzugeben. Dies entspricht einem Separationsansatz in Raum und Zeit. Dabei werden hinsichtlich der zeitlichen Entwicklung des schwingenden Flügels noch keine Annahmen gemacht. Erst die zusätzliche Beschränkung auf kleine Amplituden und harmonische Bewegung vereinfacht die Bewegungsgleichungen dergestalt, daß die klassische Flatteranalyse ermöglicht wird.

Eine realistische stationäre Verformung für $\vartheta_s(\eta)$ und $\alpha_s(\eta)$ muß den experimentellen Daten für einen vermessenen Flügel entnommen werden. Instationär ergeben sich verschiedene Schwingungsformen, angefangen bei Grundbiegung und Grundtorsion. Für diese beiden Fälle sind Prinzipskizzen des Verlaufs in Bild 3 angegeben. Die höheren Schwingungsmoden haben längs der Spannweite eine oder mehrere Nullstellen in ihrer Formfunktion. Die einzelnen Moden unterscheiden sich vor allem auch in ihrer Frequenz, wodurch sie voneinander in der Messung zu unterscheiden sind. Für theoretische Rechnungen zur aeroelastischen Kopplung und Stabilität des schwingfähigen System sind mit Grundbiegung und Grundtorsion bereits wesentliche Aussagen zur Entwicklung des Stabilitätsverhalten möglich.

Bezeichnet man mit $\hat{y} = y_0 / \cos\varphi$ die Spannweitenposition längs der Biegeachse, dann sei der Zusammenhang zwischen Biegewinkel und örtlicher Auslenkung h definiert durch

$$\hat{y}\vartheta(\eta, t) = \hat{h}(\eta, t) = f_h(\eta) h(t) . \quad (12.1)$$

Es handelt sich deswegen um eine Definition, weil für die Formfunktion ein Zusammenhang mit der Vertikalauslenkung unterstellt wird, der bei größeren Amplituden nicht mehr vorhanden ist. Aus dem in der Messung gefundenen Verlauf der Biegekurve wird der funktionale Zusammenhang für die theoretische Rechnung somit näherungsweise abgeleitet.

Mit der Annahme eines quadratischen Anstiegs der Biegeamplitude $f_h(\eta) = \eta^2$ folgt

$$\vartheta(\eta, t) = \frac{\cos\varphi}{y} \eta^2 l_r \frac{h(t)}{l_r} = \frac{\cos\varphi}{s/l_r} \eta q_\vartheta(t) . \quad (12.2)$$

Als Bezugslänge ist die Wurzelflügeltiefe l_r gewählt. Die der Biegung zugeordnete generalisierte Koordinate $q_\vartheta(t)$ hat in der hier definierten Form den Vorzug, für verschiedene Pfeilungen und Spannweiten zu vergleichbaren Auslenkungen zu führen. Für die Biegefunktion folgt

$$\vartheta(\eta, t) = f_\vartheta(\eta) q_\vartheta(t) \quad \text{mit} \quad f_\vartheta(\eta) = \frac{\cos \varphi}{s/l_r} \eta . \quad (12.3)$$

Für harmonische Bewegung vereinfacht sich die Darstellung zu

$$\vartheta(\eta, t) = f_\vartheta(\eta) (q_{\vartheta S} + q_{\vartheta 0} e^{i\alpha}), \quad q_{h0} = \bar{q}_{h0} e^{i\kappa} . \quad (12.4)$$

Darin ist $q_{\vartheta S}$ die stationäre Auslenkung, $\bar{q}_{\vartheta 0}$ die Amplitude der instationären Biegung und κ die zugehörige Phasenlage gegenüber einer Referenzbewegung.

Für die Torsionsfunktion $\alpha(\eta, t)$

$$\alpha(\eta, t) = f_\alpha(\eta) q_\alpha(t) \quad (13.1)$$

sei mit H. Försching [2] ein sinusförmiger Anstieg angenommen

$$f_\alpha(\eta) = \sin \frac{\pi}{2} \eta . \quad (13.2)$$

Ist die Torsion die ausgewählte Referenzbewegung, dann ist bei harmonischer Bewegung

$$q_\alpha(t) = \bar{q}_{\alpha 0} e^{i\alpha} \quad (13.3)$$

die zugehörige generalisierte Koordinate.

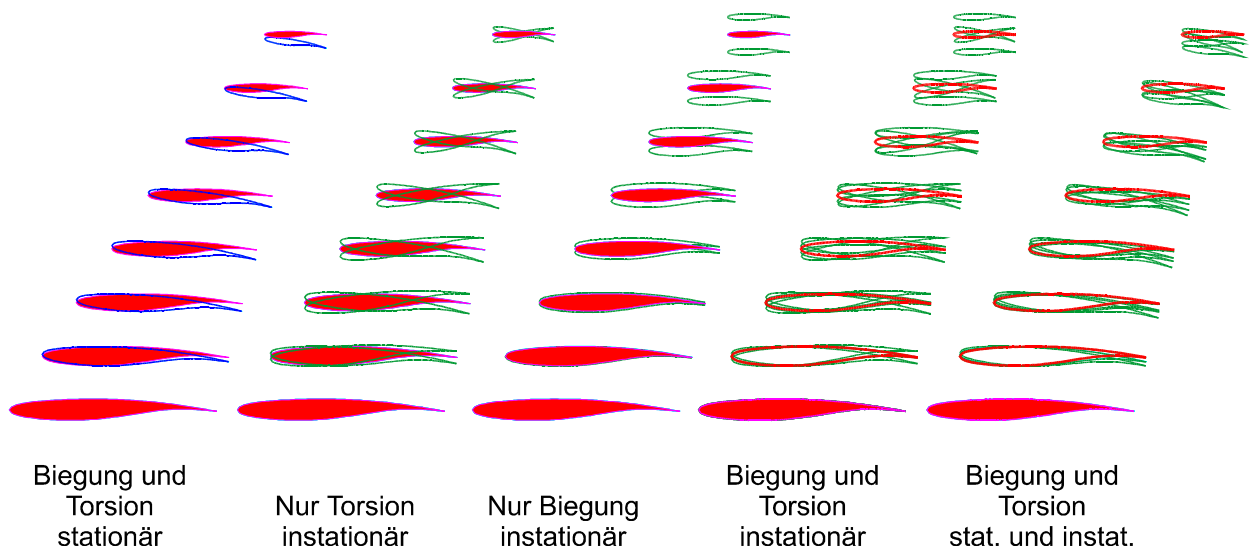


Bild 4 Biegung und Torsion stationär und instationär
Schwingungsformen für Trapezflügel

Bild 4 zeigt die Schwingungsformen für einen gepfeilten Flügel. Dargestellt ist die Projektion der Auslenkung in die Anströmebene. Die Formfunktionen sind nach (12.3) und (13.2) angesetzt. Die Biegeachse (siehe Bild 2) liegt bei $(e_r, e_t) = (l_r/3, l_t/2)$. Bei der gekoppelten Bewegung ist die Phasenvoreilung $\kappa = 90^\circ$ eingesetzt. Deshalb weisen die Profilquerschnitte am oberen und unteren Umkehrpunkt keine Drehung auf. Biegung und Torsion sind gleich groß angesetzt. Da das Bild nur die generelle Wirkung der Funktionen in (4) demonstrieren soll, ist auf weitere Angaben zu den Daten verzichtet. Hingewiesen sei auch auf die Möglichkeit, die Formfunktionen f_β und f_α komplex darzustellen. Hierdurch läßt sich die auch im Experiment beobachtete Phasenverschiebung längs der Spannweite einführen.

7. LÖSUNG DES UMSTRÖMUNGSPROBLEMS

Die physikalische Lösung des Umströmungsproblems verlangt, das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} des umgebenden Fluids so zu bestimmen, daß entweder auf den umströmten Oberflächen S das Fluid haftet, also

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_s(t), t) = -\mathbf{v}_{\text{kin}}(\mathbf{x}_s(t), t) \quad (14.1)$$

gilt für alle Punkte \mathbf{x}_s der Oberflächen, oder aber zumindest die Normalkomponente von \mathbf{v} verschwindet, also

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_s(t), t) \mathbf{n}(\mathbf{x}_s(t), t) = -\mathbf{v}_{\text{kin}}(\mathbf{x}_s(t), t) \mathbf{n}(\mathbf{x}_s(t), t) \quad (14.2)$$

erfüllt ist. \mathbf{n} sei der Normalenvektor im jeweiligen Punkt der Oberfläche. Die Darstellung im Bezugssystem des Fluids führt zur Zeitabhängigkeit aller geometrischen Argumente. Im flügelfesten Bezugssystem B^* vereinfachen sich die beiden Bedingungen zu

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}_s^*, t) = -\mathbf{v}_{\text{kin}}^*(\mathbf{x}_s^*, t) \quad (15.1)$$

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}_s^*, t) \mathbf{n}^*(\mathbf{x}_s^*) = -\mathbf{v}_{\text{kin}}^*(\mathbf{x}_s^*, t) \mathbf{n}^*(\mathbf{x}_s^*) \quad (15.2)$$

Der praktische Gewinn der Schreibweise (15.2) ist gering, wenn tatsächlich die lokalen Tangentialräume für die örtlichen Vektoren eines elastisch sehr verformten Körpers zuvor ermittelt werden müssen. Die Darstellung in B ist stets gültig und die Formeln für B^* werden nachfolgend im Hinblick auf vorherige Vereinfachungen mitgeführt.

Nachfolgend werden nur Lösungen untersucht, für die allein die Normalkraft des Fluids auf die umströmte Oberfläche berechnet worden ist. Diese Lösungen ergeben sich im Grenzfall verschwindend kleiner Viskosität des Fluids.

Die örtliche Kraftdichte \mathbf{f} bzw. \mathbf{f}^* auf der Oberfläche ist bestimmt durch

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_s(t), t) = -q_0 c_p(\mathbf{x}_s(t), t) \mathbf{n}(\mathbf{x}_s(t), t), \quad \text{bzw.} \quad (16.1)$$

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}_s^*, t) = -q_0 c_p(\mathbf{x}_s^*, t) \mathbf{n}^*(\mathbf{x}_s^*). \quad (16.2)$$

mit

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{q_0}, \quad q_0 = \frac{1}{2} \rho_\infty u_0^2. \quad (17)$$

ρ_∞, p_∞ sind Dichte und Ruhedruck des Fluids im Unendlichen. Bei einer dünnen Fläche anstelle eines Profils ist die örtliche Kraftdichte durch die Druckdifferenz zwischen Unter- und Oberseite der Fläche bestimmt:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_S(t), t) = +q_0 \Delta c_p(\mathbf{x}_S(t), t) \mathbf{n}(\mathbf{x}_S(t), t), \quad \text{bzw.} \quad (18.1)$$

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}_{S+}^*, t) = +q_0 \Delta c_p(\mathbf{x}_{S+}^*, t) \mathbf{n}^*(\mathbf{x}_{S+}^*) \quad (18.2)$$

Das Zeichen „+“ im Index soll andeuten, daß der Normalenvektor und die Ortsangaben sich auf die „Oberseite“ (Saugseite) der dünnen Auftriebsfläche beziehen.

Zu den bisherigen Linearisierungen, nämlich

- Linearisierung der Winkelfunktionen (kleine Biegung und Torsion),
- Linearisierung der Zeitabhängigkeit (nur harmonische Anteile der linearisierten Biege- und Torsionsfunktion),
- Linearisierung der elastischen Verformung (Druckverteilung auf der Oberfläche des unverformten Körpers angenommen),

kann eine weitere Linearisierung in der Physik der Umströmung angenommen werden:

- Die Druckverteilungen wachsen linear mit der Amplitude der Auslenkungen.

Gerade bei transsonischen Strömungen ist diese Annahme in der Regel keineswegs erfüllt. Nur bei sehr kleinen Amplituden kann man eine solche Vereinfachung vornehmen.

In diesem Fall und zusammen mit den vorherigen Annahmen können die Beiträge zur örtlichen Kraftdichte linear überlagert werden; diese ist dann eine lineare Funktion der Amplituden. In B^* folgt in diesem Grenzfall vielfacher Linearisierung

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}_S^*, t) = -q_0 (c_{P,\vartheta}(\mathbf{x}_S^*) q_\vartheta(t) + c_{P,\alpha}(\mathbf{x}_S^*) q_\alpha(t)) \mathbf{n}(\mathbf{x}_S^*). \quad (19)$$

$c_{P,\vartheta}$ ist der Anteil des Druckbeiwertes aus der Biegung und $c_{P,\alpha}$ der Anteil aus der Torsion. Im harmonischen Fall kann man den stationären Teil in (20) abspalten und nur die harmonischen Anteile betrachten. Bezeichnet $\underline{c}_{P,\vartheta}$ und $\underline{c}_{P,\alpha}$ die komplexen Druckbeiwerte, dann lautet die örtliche Kraftdichte

$$\mathbf{f}^*(\mathbf{x}_S^*, t) = -q_0 (\underline{c}_{P,\vartheta}(\mathbf{x}_S^*) \bar{q}_{\vartheta 0} e^{i\kappa} + \underline{c}_{P,\alpha}(\mathbf{x}_S^*) \bar{q}_{\alpha 0}) \mathbf{n}^*(\mathbf{x}_S^*) e^{i\omega t}. \quad (20)$$

Mit der voranstehenden Form zusammen mit der linearisierten Kinematik nach (8) kann die harmonische Flutteranalyse durchgeführt werden. Ergebnis einer solchen Analyse ist - zu gegebenen mechanischen Parametern - der komplexe Eigenvektor

$$\underline{E}_0 = \frac{\bar{q}_{\vartheta 0}}{\bar{q}_{\alpha 0}} e^{i\kappa} \quad (21)$$

Bestimmt wird also dabei - im Hinblick auf die Kinematik - das Amplitudenverhältnis und die relative Phasenlage der beteiligten Freiheitsgrade, von denen auch eine größere Anzahl vorhanden sein kann.

8. GENERALISIERTE KRÄFTE

In den voranstehenden Abschnitten sind alle Funktionen hergeleitet worden, die eine allgemeine Definition der generalisierten Kräfte für die Freiheitsgrade $q_{\vartheta}(t)$ und $q_{\alpha}(t)$ gestatten. Dies geschieht über die Definition der Leistung, die bei dem Bewegungsvorgang aufgebracht wird.

An dieser Stelle ist eine Vorbemerkung angebracht. Leistung als Produkt aus Kraft und Geschwindigkeit ist positiv, wenn Kraftvektor und Bewegung in die gleiche Richtung zeigen. In diesem Fall muß Leistung aufgebracht werden, um den Bewegungsvorgang aufrechtzuerhalten. Im anderen Fall wird Leistung bei dem Bewegungsvorgang freigesetzt. Folgende Situation liegt nun vor:

- Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_{kin} nach (7) beschreibt die Bewegung der Oberfläche gegenüber dem ruhenden Fluid.
- Die Kraftdichte \mathbf{f} nach (16.1) beschreibt die Reaktionskraft des Fluids, nicht die den Körper unterstützende Kraft.

Will man die Leistung im ruhenden System mit \mathbf{f} richtig berechnen, so muß die Gegenkraft $-\mathbf{f}$ eingesetzt werden

$$P(t) = \iint_{S(u,v)} -\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_S(u,v,t),t) \cdot \mathbf{v}_{\text{kin}}(\mathbf{x}_S(u,v,t),t) dS(u,v) \quad (22.1)$$

- Dagegen wird im körperfesten Bezugssystem mit $\mathbf{v}_{\text{kin}}^*$ als kinematischer Bewegung des Fluids gegenüber dem Körper und \mathbf{f}^* als Kraftdichte der Reaktion des Fluids auf die Körperbewegung die Leistung richtig ermittelt über das innere Produkt von \mathbf{f}^* und $\mathbf{v}_{\text{kin}}^*$:

$$P(t) = \iint_{S(u,v)} \mathbf{f}^{*T}(\mathbf{x}_S^*(u,v),t) \cdot \mathbf{v}_{\text{kin}}^*(\mathbf{x}_S^*(u,v),t) dS(u,v) \quad (22.2)$$

Das Paar (u,v) dient als geeignete Parametrisierung der Oberfläche. Der hochgestellte Index „T“ weist den Vektor als Zeilenvektor aus.

Nach (7) läßt sich \mathbf{v}_{kin} stets darstellen als lineare Funktion der Zeitableitungen der generalisierten Koordinaten, wobei auch u_0 eine solche Zeitableitung darstellt, wenn man die gleichförmige translatorische Bewegung neben $q_{\vartheta}(t)$ und $q_{\alpha}(t)$ als dritten Freiheitsgrad

$$g(t) = u_0 t \quad (23)$$

mitführt. Bezeichnet man den Vektor der generalisierten Koordinaten mit \mathbf{q} , dann lautet \mathbf{v}_{kin} explizit

$$\mathbf{v}_{\text{kin}} = \begin{bmatrix} u_{\text{kin}}(t, x, y, z) \\ v_{\text{kin}}(t, x, y, z) \\ w_{\text{kin}}(t, x, y, z) \end{bmatrix} = \{\Phi_g, \Phi_{\vartheta}, \Phi_\alpha\} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \Phi_{\text{kin}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{g} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad (24)$$

$$\Phi_{\text{kin}} = \begin{bmatrix} -1 & f_{\vartheta} \sin \varphi z & + f_\alpha (\sin \vartheta(t) y + \cos \varphi \cos \vartheta(t) z) \\ 0 & f_{\vartheta} \cos \varphi z & - f_\alpha (\sin \vartheta(t) x + \sin \varphi \cos \vartheta(t) z) \\ 0 & -f_{\vartheta} (\sin \varphi x + \cos \varphi y) & -f_\alpha \cos \vartheta(t) (\cos \varphi x - \sin \varphi y) \end{bmatrix}$$

Die Matrix Φ_{kin} soll die Bezeichnung kinematische Matrix haben. Eine entsprechende Matrix Φ_{kin}^* ergibt sich aus (8). Die Leistung in (22.1) lautet damit

$$P(t) = \left[\iint_S -\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_S, t) \cdot \Phi_{\text{kin}}(\mathbf{x}_S, t) dS \right] \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (25)$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer stellt die generalisierten Kräfte dar, die zu den einzelnen Freiheitsgraden gehören. Mit

$$\mathbf{Q}^T = [Q_g, Q_{\vartheta}, Q_\alpha], \quad (26)$$

als Vektor der generalisierten Kräfte folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^T(t) &= \left[\iint_S -\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_S, t) \cdot \Phi_{\text{kin}}(\mathbf{x}_S, t) dS \right] \\ &= \left[\iint_S \mathbf{f}^{*T}(\mathbf{x}_S^*, t) \cdot \Phi_{\text{kin}}^*(\mathbf{x}_S^*, t) dS \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Zu beachten ist, daß die generalisierten Kräfte unabhängig von der Wahl des Bezugssystem sind. Für die gesamte aerodynamische Leistung lautet die Darstellung:

$$P(t) = \mathbf{Q}^T \cdot \dot{\mathbf{q}} = P_g(t) + P_{\vartheta}(t) + P_\alpha(t) \quad (28)$$

Für die Leistungen können nach W. Send [1] ebenfalls Beiwerte definiert werden:

$$c_{\Pi}(t) = \frac{P(t)}{P_0} = c_{\Pi, g}(t) + c_{\Pi, \vartheta}(t) + c_{\Pi, \alpha}(t), \quad P_0 = \frac{1}{2} \rho_\infty u_0^3 \quad (29)$$

Bei periodischen Vorgängen ist von besonderem Interesse die im Mittel der Periodendauer T freigesetzte oder aufgenommene Leistung:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t) dt = \langle P_g \rangle + \langle P_{\vartheta} \rangle + \langle P_\alpha \rangle \quad (30)$$

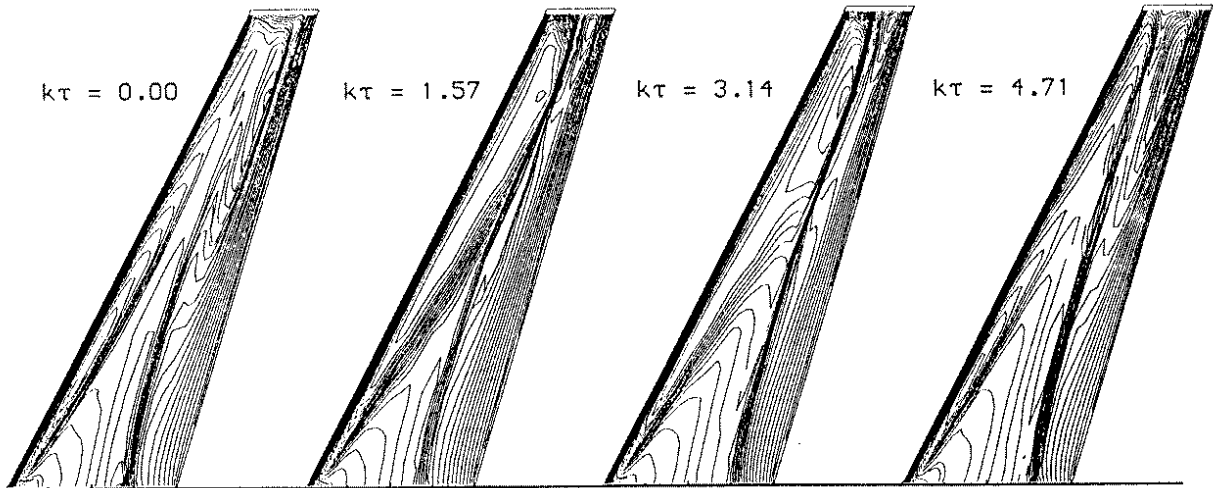


Bild 5 Isomachlinien LANN-Modellflügel, $Ma = 0.82$, $\omega^* = 0.5$
 Torsion $\alpha(\eta, t) = 0.6^\circ + 2.5^\circ \sin(\eta \pi / 2) \sin(\omega^* t)$, $k = \omega^*$

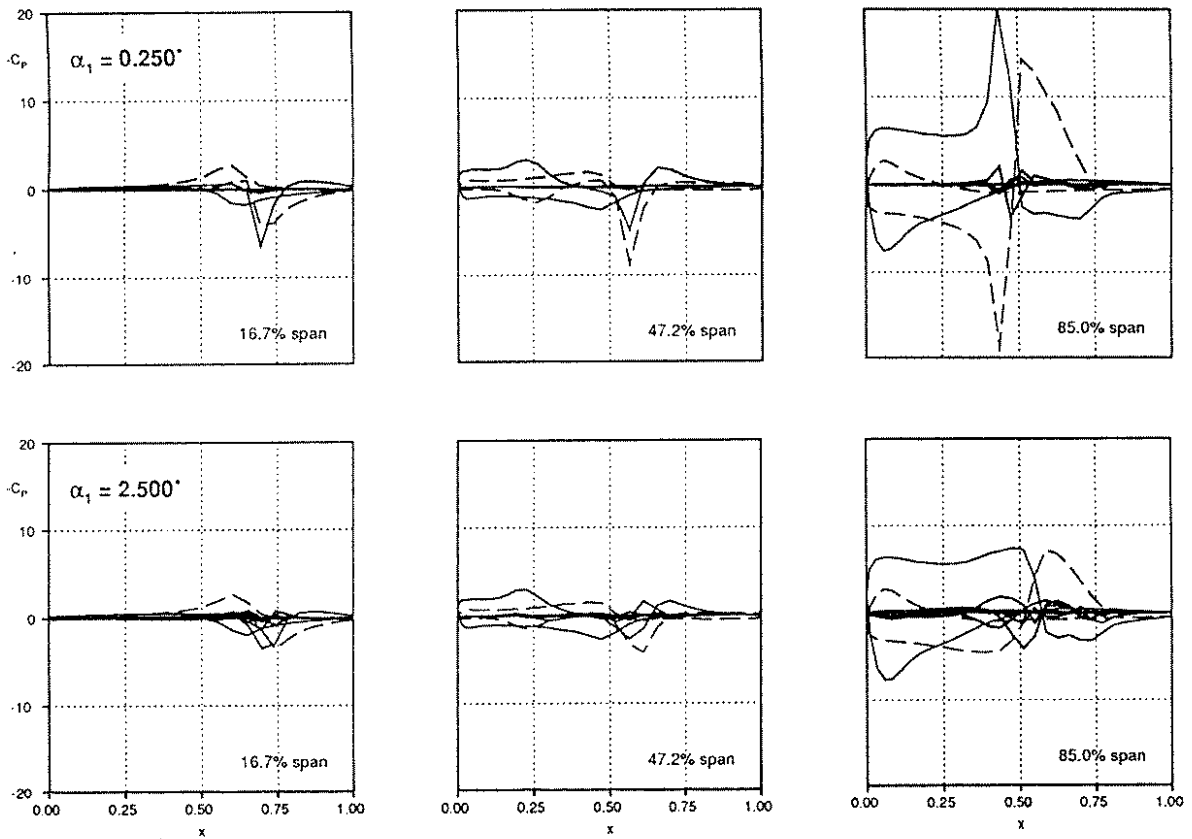


Bild 6 Druckverteilung LANN-Modellflügel, $Ma = 0.82$, $\omega^* = 0.5$
 Torsion $\alpha(\eta, t) = 0.6^\circ + 2.5^\circ \sin(\eta \pi / 2) \sin(\omega^* t)$
 1., 2. und 3. Harmonische, ——— $Re(c_p)$, - - - - - $Im(c_p)$

Die einzelnen Anteile an der Leistung geben Auskunft darüber, in welchem Freiheitsgrad und zu welchem Zeitpunkt dem Luftstrom Leistung entzogen werden kann. Dies kann durch Variationen der Geometrie und der Schwingungsformen festgestellt werden. Nur in solchen Bereichen kann sich eine Instabilität überhaupt einstellen. Insgesamt ist $P(t)$ stets positiv, da diese Leistung gleich ist der dem Fluid zugeführten Leistung, die als Bewegungsenergie im Fluid hinter dem umströmten Körper zurückbleibt.

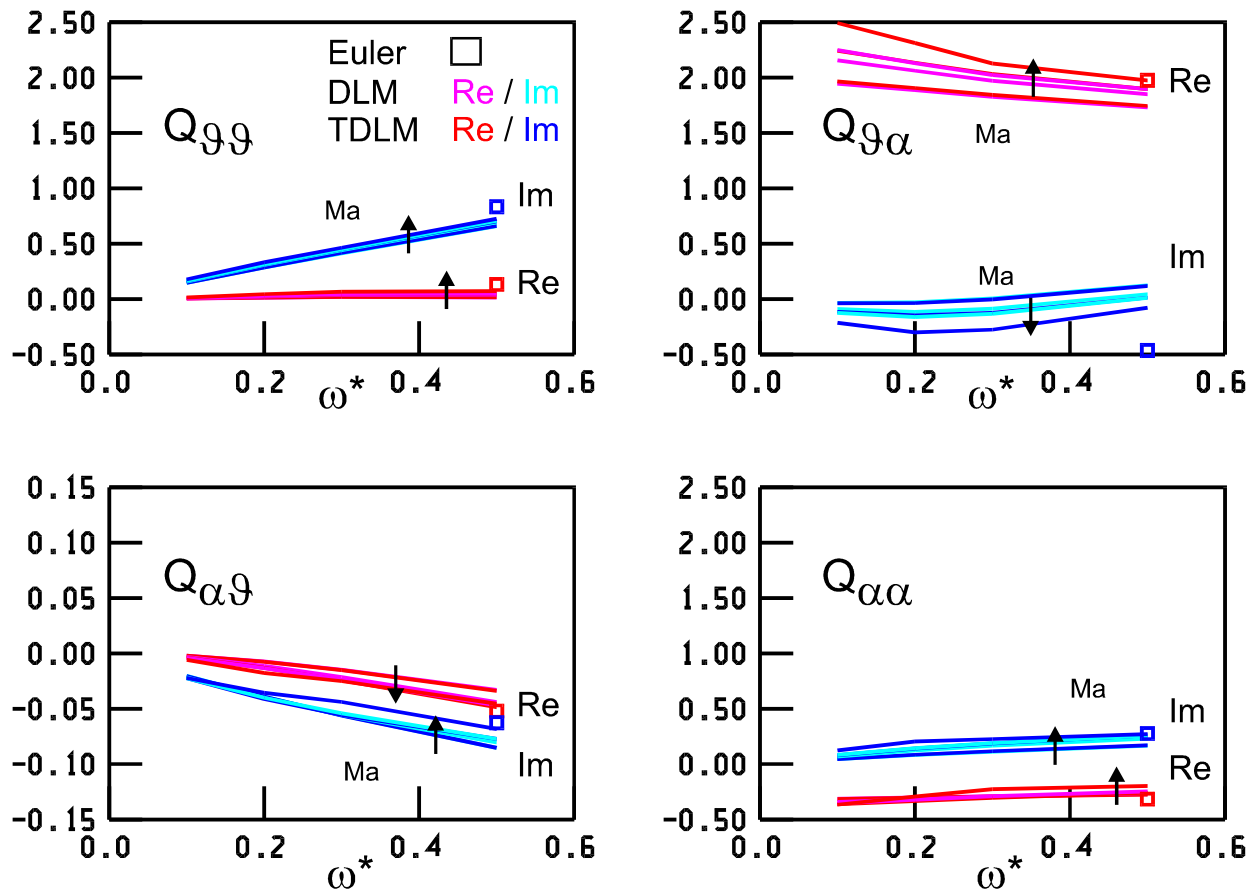


Bild 7 Generalisierte Kräfte für LANN-Modellflügel
 Modelldaten: $s = 1$, $l_T=0.36$, $\lambda_T = 0.4$, $\varphi_T = 25^\circ$

In den nachfolgenden Beispielen werden die instationären Luftkräfte mit folgenden Verfahren berechnet:

- 3D transsonisches „Doublet-Lattice“-Verfahren nach R. Voß und S. Lu [3], bezeichnet mit TDLM, ein zeitlinearisiertes Feldpanelverfahren auf der Basis der transsonischen Potentialgleichung kleiner Störungen, bezeichnet mit TSD.
- 3D zeitgenaues nichtlineares Eulerverfahren nach W. Wegner [4]. Die zeitabhängigen Oberflächendruckverteilungen werden anschließend in ihre Fourierkomponenten zerlegt. Zur Berechnung der generalisierten Luftkräfte in der nachfolgenden Gleichung (33) werden die Grundharmonischen abgespalten.

Bild 5 zeigt die numerische Lösung der Eulergleichungen für den LANN-Modellflügel [7] für eine harmonische Torsionsschwingung. Die starke Stoßwanderung bei großer

Amplitude wird im Spitzenbereich des Flügels deutlich. Zusätzlich wird zeitweise auch ein Doppelstoß sichtbar. Dieser greift durch auf das λ -förmige Stoßsystem über dem Hauptteil des Flügels. Die zeitliche Verschiebung in der maximalen Stoßstärke ist auf Laufzeiteffekte zurückzuführen.

Die Frequenzanalyse dieser Bewegung ist in Bild 6 dargestellt. Dargestellt sind die Analysen der Druckverteilung für zwei verschiedene Schwingungsamplituden 0.25 deg und 2.5 deg (an der Flügelspitze). Zunächst läßt sich feststellen, daß sich die Grundharmonischen (bis auf den Stoßbereich) nicht sehr unterschiedlich verhalten, sondern daß bei der größeren Amplitude der Anteil der Oberwellen erheblich zunimmt. Bei kleinen Amplituden sind die Druckspitzen ausgeprägter, weil die instationäre Stoßwanderung in einem schmalen Bereich der Flügelfläche auftritt.

Bild 7 schließlich gibt für den LANN-Flügel die generalisierten Luftkräfte nach (33) wieder. Mit DLM und TDLM sind die Luftkräfte für drei verschiedene Machzahlen $Ma=0.6, 0.77$ und 0.82 berechnet worden. Vom Eulerverfahren stammen Ergebnisse für die oberste Machzahl. Die reduzierte Frequenz ω^* ist bezogen auf die mittlere Flügeltiefe l_M (siehe Abschnitt 9).

Die Werte $\omega^* = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$ decken den für Stabilitätsuntersuchungen notwendigen Bereich ab. Da die Ergebnisse nur die Grundharmonische wiedergeben, sind die Abweichungen teilweise noch größer, als es in den Auftragungen deutlich wird.

9. STABILITÄTSANALYSE

Eine vollständige Analyse des zeitlichen und örtlichen Stabilitätsverhaltens liefert (22.1) im Fall der aeroelastischen Kopplung, also bei der direkten Lösung der Gleichung (1). Da $\mathbf{x}_s(u, v, t)$ in diesem Fall die tatsächliche Lösung der Bewegungsgleichung darstellt, liefert in

$$P(t) = \iint_{S(u,v)} dP(u, v, t) \quad (31)$$

der Integrand $dP(u, v, t)$ die gesamte Leistung, die im jeweiligen Flächenelement momentan umgesetzt wird. Entsprechend können die einzelnen Teilleistungen am Freiheitsgrad q_k analysiert werden. Dabei gilt:

$$dP_k(u, v, t) > 0 \quad \text{Leistung wird aufgebracht, die Bewegung ist stabil.}$$

$$dP_k(u, v, t) < 0 \quad \text{Leistung wird aufgenommen, die Bewegung ist instabil.}$$

Für die beiden Freiheitsgrade Biegung und Torsion folgt die linearisierte kinematische Matrix nach (8)

$$\{\Phi_{\vartheta}^{*L}, \Phi_{\alpha}^{*L}\} = \begin{bmatrix} -f_{\vartheta} \sin \alpha_s \left(\frac{y_0}{\cos \varphi} + \tan \varphi x^* \right) & -f_{\alpha} z^* \\ f_{\vartheta} (\sin \alpha_s x^* - \cos \alpha_s z^*) & 0 \\ f_{\vartheta} \cos \alpha_s \left(\frac{y_0}{\cos \varphi} + \tan \varphi x^* \right) & f_{\alpha} x^* \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Die generalisierten Kräfte lauten

$$\begin{aligned}\underline{Q}_{\vartheta} &= \iint_S \mathbf{f}^{*T}(\mathbf{x}_S^*, t) \Phi_{\vartheta}^{*L} dS = \iint_S -q_0 \mathbf{n}^{*T} \Phi_{\vartheta}^{*L} \cdot [(c_{P,\vartheta}(\mathbf{x}_S^*) \bar{q}_{\vartheta 0} e^{i\kappa} + c_{P,\alpha}(\mathbf{x}_S^*) \bar{q}_{\alpha 0})] dS \quad (33.1) \\ &= \underline{Q}_{\vartheta\vartheta} \bar{q}_{\vartheta 0} e^{i\kappa} + \underline{Q}_{\vartheta\alpha} \bar{q}_{\alpha 0}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\underline{Q}_{\alpha} &= \iint_S \mathbf{f}^{*T}(\mathbf{x}_S^*, t) \Phi_{\alpha}^{*L} dS = \iint_S -q_0 \mathbf{n}^{*T} \Phi_{\alpha}^{*L} \cdot [(c_{P,\vartheta}(\mathbf{x}_S^*) \bar{q}_{\vartheta 0} e^{i\kappa} + c_{P,\alpha}(\mathbf{x}_S^*) \bar{q}_{\alpha 0})] dS \quad (33.2) \\ &= \underline{Q}_{\alpha\vartheta} \bar{q}_{\vartheta 0} e^{i\kappa} + \underline{Q}_{\alpha\alpha} \bar{q}_{\alpha 0} \quad .\end{aligned}$$

In dieser Form gehen sie ein in Gleichung (1), wenn die Stabilität durch eine harmonische Analyse ermittelt werden soll.

Die Aufstellung der Lagrangeschen Gleichung aus der Lagrangefunktion $L=T-U$ erfolgt mit den eingeführten Termen. Mit $T=E_{\text{kin}}$ ist

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} \iiint_{\text{Vol}} \rho(\mathbf{x}^*, t) \mathbf{v}_{\text{kin}}^2(\mathbf{x}^*, t) dV \quad (34)$$

Die Integration erstreckt sich über alle Volumina von Flügel und Triebwerken. Auch explizite Massenverlagerungen können berücksichtigt werden durch zeitabhängige Dichteverteilung („Kraftstoffschwappen“) Gewöhnlich ist die Struktur aber fest verteilt. Das Quadrat von \mathbf{v}_{kin} wird nach (24) berechnet:

$$\mathbf{v}_{\text{kin}}^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \Phi_{\text{kin}}^T \cdot \Phi_{\text{kin}} \dot{\mathbf{q}} \quad (35)$$

Der Ausdruck $\Phi_{\text{kin}}^T \cdot \Phi_{\text{kin}}$ sei quadratische kinematische Matrix genannt. Die kinematische Matrix ist in der Regel zeitabhängig.

- Für die folgende Herleitung sei \mathbf{q} der Übersicht wegen mit einer Länge behaftet (z.B. l_M).

Die kinetische Energie lässt sich daher mit der generalisierten Massenmatrix

$$\mathbf{M}(t) = \iiint_{\text{Vol}} \rho(\mathbf{x}^*, t) \Phi_{\text{kin}}^T(\mathbf{x}^*, t) \Phi_{\text{kin}}(\mathbf{x}^*, t) dV \quad (36)$$

darstellen durch

$$T(t, \dot{\mathbf{q}}) \equiv E_{\text{kin}}(t, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T(t) \mathbf{M}(t) \dot{\mathbf{q}}(t) \quad (37)$$

Ist \mathbf{v}_{kin} linearisiert, dann ist Φ_{kin} definitionsgemäß zeitunabhängig. Eine zeitlich veränderliche Struktur soll ebenfalls nicht betrachtet werden. \mathbf{M} ist somit konstant. Für die potentielle Energie U lautet die formal ähnlich aufgebaute Gleichung mit den generalisierten Koordinaten:

$$U(t, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T(t) \mathbf{K}(t, \mathbf{q}) \mathbf{q}(t) \quad (38)$$

Im linearisierten Fall ist die generalisierte Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} eine Konstante und im Fall orthogonaler Schwingungsformen sogar eine Diagonalmatrix. Die Herleitung der Lagrangeschen Gleichungen (1) aus der Lagrangefunktion L

$$L(t, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} - \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (39)$$

gestaltet sich bei strikter (und in mehrfacher Hinsicht vorzunehmender) Linearisierung besonders einfach. Während \mathbf{M} nach (35) definitionsgemäß eine symmetrische Matrix ist, ist dies bei \mathbf{K} nicht generell der Fall. Bei orthogonalen Schwingungsformen lauten die linearisierten Lagrangeschen Gleichungen jedoch stets:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = -\mathbf{Q} \mathbf{q} \quad (40)$$

In der Matrix \mathbf{Q} sind die Komponenten zusammengefaßt, wie sie sich in (33) und analogen Fällen ergeben.

Die weitere Behandlung von (40) führt bekanntlich auf ein Eigenwertproblem, wie kurz skizziert sei. (40) ist eine Kraftgleichung. \mathbf{M} werde auf eine Konstante m_0 bezogen, \mathbf{K} durch die Eigenfrequenzen $K_{ii} = m_0 \omega_i^2$ ausgedrückt und aus \mathbf{Q} die Konstante $q_0 l_M$ herausgezogen. Aus $\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{q}$ folgt die Teilung aller Terme durch $-\omega^2$. Die Definitionen für die reduzierte Frequenz ω^* und die äquivalente Fluidmasse m_∞

$$\omega^* = \frac{\omega l_M}{u_0} \quad \text{und} \quad m_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty l_M^3 \quad (41)$$

führen auf das Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{m_0}{m_\infty} \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{bmatrix} - \frac{m_0}{m_\infty} \begin{bmatrix} (\omega_1 / \omega)^2 & 0 \\ 0 & (\omega_2 / \omega)^2 \end{bmatrix} - \frac{1}{\omega^{*2}} \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix} \right] \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (42)$$

Bezeichnet man noch

$$\mu = \frac{m_0}{m_\infty}, \quad \Omega = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{\omega_2^2}{\omega^2} \quad (43)$$

und setzt $\mu_{11} = 1$ (ohne Beschränkung der Allgemeinheit), sowie wegen der Symmetrie (und Vergleichbarkeit mit anderen Publikationen) $\mu_{21} = \mu_{12} = x_\mu$ und $\mu_{22} = r_\mu$, dann kann man das Eigenwertproblem (42) für verschiedene Luftkräfte allgemein untersuchen, ohne alle mechanischen Parameter im einzelnen kennen zu müssen. Für gezielte Stabilitätsaussagen müssen die obigen Kennzahlen aus einer gegebenen Konfiguration ermittelt werden. Wegen der Linearität können die Lösungen verschiedener umströmter Körper (Flügel, Triebwerke) zusammengefaßt und insgesamt untersucht werden, wenn sie nur den gleichen Schwingungsformen ausgesetzt sind.

Das Eigenwertproblem besteht in der Suche nach nichttrivialen Lösungen von (42), wozu die Determinante von (42) nach λ aufgelöst wird. Gesucht sind reelle Lösungen dieses Frequenzverhältnisses. Der nichtlineare Zusammenhang entsteht durch die Kopplung mit der reduzierten Frequenz.

Auf dieser Basis sind in den letzten Jahren von H. Försching, K. v. Diest [5], H. Försching, A. Senft [2] und H. Försching, J. M. Knaack [6] eine Reihe von Untersuchungen zum System Flügel mit Triebwerk durchgeführt worden, die eine große Zahl von Parametervariationen enthalten.

10. SCHLUSSFOLGERUNG

Gezeigt worden ist, daß die klassische harmonische Stabilitätsanalyse von Voraussetzungen ausgeht, die für transsonische Luftkräfte in der Regel nicht mehr erfüllt sind. Diese Feststellung hat mehrere Gründe.

Die kinematische Matrix enthält zeitabhängige Anteile, die auf den relativen Verschiebungen der Struktur während des Bewegungsvorgangs beruhen. Je größer und damit weicher eine Tragfläche wird, desto mehr gewinnen diese Terme an Einfluß. Um diesen zu untersuchen, muß die Annahme der Zeitunabhängigkeit der kinematischen Matrix aufgegeben werden.

Die Luftkräfte selbst nehmen im transsonischen Bereich stark in ihrer Oberwelligkeit zu. Die nichtlineare Kopplung mit dem Einfluß der Oberwellen bedarf eingehender Untersuchungen, zu denen das kinematische Modell, das in dieser Arbeit beschrieben ist, einen geeigneten Einstieg anbietet.

Die lineare Überlagerung von Luftkräften stößt schon bei kleinen Amplituden an Grenzen, weil der gekoppelte Bewegungsvorgang zu anderen Druckverteilungen führt als die Summe aus den Einzelbewegungen. Damit verlieren die generalisierten Kräfte ihre Linearitätseigenschaften hinsichtlich der generalisierten Koordinaten. Die Lösung der Lagrangeschen Gleichung muß dann im Zeitbereich erfolgen. Die Untersuchung der umgesetzten Leistungen ist dabei ein geeignetes Instrument zur Stabilitätsanalyse.

Literatur

- [1] Send, W., The Mean Power of Forces and Moments in Unsteady Aerodynamics, ZAMM **72** (1992), 113-132
- [2] Försching, H., Senft, A., A parametric study of the aeroelastic stability of a binary wing-with-engine nacelle flutter system in incompressible flow, ZFW **16**, 77-87
- [3] Voß, R., Lu, S., TDLM - A Transonic Doublet Lattice Method for 3D Potential Unsteady Transonic Flow Calculation, DLR-FB 92-25
- [4] Wegner, W., Vollständige Riemannlösung der ein- und zweidimensionalen Eulergleichungen, DLR-FB 92-34
- [5] Försching, H., v. Diest, K., Flutter stability of annular wings in incompressible flow, J. Fluids and Structures **5** (1991), 47-67
- [6] Försching, H., Knaack, J.M., Parametric study of the flutter stability of a semi-rigid 3-D wing-with-engine nacelle model in subsonic flow, J. Fluids and Structures **7** (1993), 567-593
- [7] Compendium of Unsteady Aerodynamic Measurements, AGARD REPORT No. 702, Addendum No. 1 (1985)

Im vorliegenden Text (DIN-A4 Version) sind Schreibfehler korrigiert, die in der publizierten Version nachträglich gefunden wurden. Diese sind mit den Seitenbezeichnungen der publizierten Arbeit:

<u>Seite:</u>	<u>Angabe der Stelle:</u>	<u>Korrektur:</u>
2	linke Spalte oben	l_{rT} Flügeltiefe des Basistrapezes (statt: λ_{rT} ...)
2	linke Spalte unten	Oberfläche S_E einer beliebigen Gondel (statt: ... S_{E1} ...)
2	rechte Spalte unten	... einbezogen (siehe Bild 4). (Bildhinweis zugefügt)
4	Gl. (12.1)	$\hat{y}\vartheta(\eta, t) = \hat{h}(\eta, t) = f_h(\eta) h(t)$ (Dach über h fehlte.)
7	vor Gl. (27)	... generalisierten ... (statt: ... generalisieren ...)
7	rechte Spalte unten	... der größeren Amplitude ... (statt: ... Amplituden ...)
7	rechte Spalte unten	... mittlere ... (statt: ... mittlere ...)
9	nach Gl. (35)	... <u>quadratische kinematische Matrix</u> ... (erstes Wort fehlt.)
9	nach Gl. (37)	... ist somit konstant. (statt: ... ist in somit konstant.)
10	linke Spalte	... Determinante ... (statt: ... Determinate ...)
10	linke Spalte	H. Försching, A. Senft [2] (statt: ... [3])

Ferner sind die Bilder 1-4 und 7 farbig ausgedruckt. In Bild 7 ist der Ordinatenmaßstab von $Q_{\alpha\vartheta}$ verändert worden, um die Daten günstiger darzustellen.

Version V1.4 der DIN-A4 Ausgabe; Stand 8.06.95