

HARMONISCHE FLATTERANALYSE IM ZEITBEREICH

W. Send

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V. (DLR)
Institut für Aeroelastik, D-37073 Göttingen

ÜBERSICHT

Die harmonische Flatteranalyse im Zeitbereich (HAFIT)¹ ist eine Synthese der beiden Verfahren *Lösung eines Eigenwertproblems im Frequenzbereich* und *Integration im Zeitbereich*. Eine einzelne Matrix mit harmonischen Luftkräften im Frequenzbereich wird für eine Integration im Zeitbereich verwendet. Möglich sind effektive und Zeit sparende Aussagen zur Stabilität insbesondere für Vergleiche bei Modifikationen der Struktur wie auch bei daraus gegebenenfalls folgenden Veränderungen der Luftkräfte. Das Verfahren ist bereits verwendet worden bei der Untersuchung des Einflusses einer „Konturbeule“ im Rahmen des Projektes [ADIF](#) und wird auch für das neue europäische Luftfahrtprojekt [AWIATOR](#) eingesetzt, an dem das Institut u.a. im Rahmen von Stabilitätsanalysen beteiligt ist. Die Arbeit dokumentiert erstmals die Vorgehensweise und gibt einen Vergleich mit dem kommerziellen Analyseprogramm [ZAERO](#).

Die Arbeit ist ein Arbeitsbericht, der die Vergleichbarkeit der Ergebnisse von Analysen im Frequenz- und im Zeitbereich herausstellt.

BEZEICHNUNGEN

Alle Größen sind als dimensionslose Vielfache von Basiseinheiten zu sehen, die in eckigen Klammern angegeben sind.

u_0	[m/s]	Anströmgeschwindigkeit
D	[kg ℓ/s]	Dämpfungsmatrix zu gen. Koord.
\hat{D}	[kg ℓ/s]	Dämpfungsmatrix zu phys. Koord.
N	[-]	Dimension des Diff.gl.systems
p	[N/m ²]	Druck
c_p	[-]	Druckbeiwert $(p-p_\infty)/q_0$
\bar{c}_p	[-]	Druckbeiwert, komplexer
v_n	[-]	Eigenvektor
V	[-]	Eigenvektormatrix, $\{v_n\}$
λ	[-]	Eigenwert, komplexer

u_{Fl}	[m/s]	Flattergeschwindigkeit
ℓ	[m]	Flügeltiefe, Bezugslänge
f	[Hz]	Frequenz
v_{kin}	[ℓ/s]	Geschwindigkeit, kinematische
i	-	Imaginärzahl, $i = \sqrt{-1}$
q, \dot{q}	[-], [s ⁻¹]	Koordinaten, generalisierte (modale)
r, \dot{r}	[-], [s ⁻¹]	Koordinaten, physikalische
f	[kg ℓ/s ²]	Kraftvektor, generalisierter
\hat{f}	[kg ℓ/s ²]	Kraftvektor, physikalischer (modaler)
ω	[s ⁻¹]	Kreisfrequenz $\omega = 2\pi \cdot f$
Q	[ℓ ²]	Luftkraftmatrix, generalisierte
Ma	[-]	Machzahl
M	[kg ℓ]	Massenmatrix zu gen. Koordinaten
\hat{M}	[kg ℓ]	Massenmatrix zu phys. Koordinaten
ΔS_k	[ℓ ²]	Oberflächenelement
ω^*	[-]	reduzierte Frequenz, $\omega^* = \frac{\omega \ell / 2}{u_0}$
Re	[-]	Reynoldszahl
p_∞	[N/m ²]	Ruhedruck im Fluid
q_0	[N/m ²]	Staudruck, $q_0 = \frac{1}{2} \rho u_0^2$
K	[kg ℓ/s ²]	Steifigkeitsmatrix zu gen. Koord.
\hat{K}	[kg ℓ/s ²]	Steifigkeitsmatrix zu phys. Koord.
X^T	-	Transposition von X
n	-	Zählindex für Diff.gl.-Komponenten
j	-	Zählindex für Frequenzen
m	-	Zählindex für Moden

1. EINLEITUNG

Die Grenze der aeroelastischen Stabilität von Luftfahrzeugen wird ermittelt aus der Gleichung

$$(1) \quad \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{D} \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$$

für die Wechselwirkung zwischen schwingender Struktur, beschrieben in modalen Koordinaten **q**, und den Luftkräften **f**. **M**, **D** und **K** sind die Diagonalmatrizen für Masse, Dämpfung und Steifigkeit einer gegebenen Struktur. Massen und Steifigkeiten folgen aus einem Finite-Elemente

¹ Harmonic Analysis of Flutter Integrated in Time (vom Autor angeregte Bezeichnung)

Programm (FE), mit dem der umströmte Körper konstruiert worden ist (z.B. [ANSYS](#), [NASTRAN](#)). Für Modellprobleme sind Vorgaben in analytischer Darstellung möglich.

Modale Koordinaten \mathbf{q} sind die Auslenkungen der einzelnen Schwingungsformen (Moden) einer von äußeren Kräften freien Struktur, die sich als Lösungen des Eigenwertproblems $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ in der Form

$$(2) \quad \hat{\mathbf{M}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{v}_n = \omega_n^2 \cdot \mathbf{v}_n, \quad n = 1, \dots, N$$

für die einzelnen reellen Eigenwerte $\lambda_n = \omega_n^2$ und die zugehörigen Eigenvektoren \mathbf{v}_n (Schwingungsformen) ergeben. Gleichung (2) folgt aus der primären Darstellung der Struktur zu physikalischen Raumkoordinaten \mathbf{r}

$$(3) \quad \hat{\mathbf{M}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}(t) + \hat{\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) + \hat{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{r}(t) = \hat{\mathbf{f}}(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}, t).$$

Die Raumkoordinaten \mathbf{r} sind die geometrischen Stützpunkte (Knotenpunkte) der diskretisierten Struktur mit ihren bis zu sechs Freiheitsgraden je Knoten. Die Dimension des Gleichungssystems (3) sei N . Die Darstellung in (1) folgt durch Diagonalisierung mit der Matrix $\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_n\}$ der orthogonalen, auf die Länge 1 normierten Eigenvektoren aus der Lösung von Gleichung (2). Die kurze Schreibweise $\{\mathbf{v}_n\}$ ist so zu verstehen, dass die Eigenvektoren spaltenweise in der Matrix \mathbf{V} angeordnet sind. Mit den Transformationen

$$(4) \quad \mathbf{r}_n = \mathbf{V} \cdot \mathbf{q}_n, \quad \mathbf{M} = \mathbf{V}^T \cdot \hat{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{V} \quad \text{und} \quad \mathbf{f} = \mathbf{V}^T \cdot \hat{\mathbf{f}}$$

sowie den analogen Transformationen für \mathbf{D} und \mathbf{K} folgt die modale Darstellung (1). Die Diagonalelemente der Diagonalmatrizen $\mathbf{M} = \{m_{nn}\}$ und $\mathbf{K} = \{k_{nn}\}$ werden auch als generalisierte (modale) Massen und Steifigkeiten bezeichnet. Die Gleichung in physikalischen Raumkoordinaten \mathbf{r} unterscheidet sich formal nicht von der Darstellung (1) mit \mathbf{q} als Variablen, wohl aber in der praktisch zu lösenden Dimension des Differentialgleichungssystems, die in physikalischen Koordinaten stets sehr viel größer sein muss. In modaler Darstellung genügt häufig die Einbeziehung der niedrigsten Eigenfrequenzen einer Struktur, während die Diskretisierung der Struktur keine Reduzierung auf wenige Stützpunkte gestattet.

Die Luftkräfte werden gewonnen aus der Lösung des Umströmungsproblems für einen Körper, auf dessen gesamter Oberfläche das umgebende Fluid entweder haften oder das den Körper zumindest tangential umströmen muss. Im ersteren Fall dient als Impulssatz die Navier-Stokes Gleichung mit Zähigkeit und folglich einer endlich dicken Grenzschicht, im letzteren die Eulergleichung mit infinitesimal dünner Grenzschicht ($Re \rightarrow \infty$). In

beiden Fällen geht in die Randbedingung des Umströmungsproblems das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}_{kin}(\mathbf{x}, t)$ der kinematischen Bewegung der Körperoberfläche ein, so dass die Luftkräfte abhängen vom Ort \mathbf{x} auf dem Körper sowie der dort vorhandenen Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}_{kin}$. In modalen Koordinaten wird daraus die Abhängigkeit von $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$.

Es sei angemerkt, dass Gleichung (1) selbst eine Linearisierung der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen ist, in der die Massen in ihrer relativen Lage zueinander als zeitlich unveränderlich angenommen sind und die Steifigkeiten des Körpers sich konstant gegenüber den Auslenkungen verhalten. Große Auslenkungen der Struktur sind vom Prinzip her ebenso nicht berücksichtigt wie nichtlineares Verhalten der Steifigkeiten. Für beide Fälle wären zusätzliche Terme zu berücksichtigen, die nichtlinear in $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ sind.

2. ANALYSEVERFAHREN

2.1. Analyse im Frequenzbereich

Die Analyse im Frequenzbereich löst ein komplexes Eigenwertproblem mit dem Ansatz

$$(5) \quad \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_a \cdot e^{i\omega t}$$

und harmonischen Fluidkräften

$$(6) \quad \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = -q_0 \cdot \mathbf{Q}(u_0, f_n) \cdot \mathbf{q}(t)$$

der Luft (q_0 : Staudruck). Die Luftkräfte sind negativ angesetzt, denn die den Körper beschleunigenden Kräfte \mathbf{f} werden indirekt über die Reaktionskräfte des Fluids $-\mathbf{f}$ bestimmt, die sich erst aus der Bewegung ergeben.

Komplex sind in der Gleichung stets die Luftkräfte, deren Realteil zu den Auslenkungen \mathbf{q} , und deren Imaginärteil zu den Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ proportional ist. Wird eine zur Geschwindigkeit proportionale Dämpfung angenommen, so ergibt sich eine zusätzliche und erhebliche Komplikation für die Lösung der Gleichung

$$(7) \quad \left[-\omega^2 \cdot \mathbf{M} + i \cdot \omega \cdot \mathbf{D} + \mathbf{K} + q_0 \cdot \mathbf{Q}(u_0, f_n) \right] \cdot \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}.$$

Ohne Dämpfung \mathbf{D} lässt sich mit $\lambda = \omega^2$ die voran stehende Gleichung als Eigenwertproblem für den komplexen Eigenwert λ lösen, wobei es entsprechend der Dimension N von \mathbf{q} vielfache Lösungen $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ gibt. Aus

$$(8) \quad \sqrt{\lambda_n} = \omega_n + i \cdot d_n, \quad n = 1, \dots, N,$$

ergibt sich die Stabilitätsanalyse durch Parametervariation von Staudruck, Geschwindigkeit und Frequenzen. Die Stabilitätsgrenze wird erreicht,

wenn erstmals ein Eigenwert eine ungedämpfte Eigenschwingung anzeigt. Für ein negatives d_n ergibt sich in der Lösung aus Gleichung (5) ein exponentieller Anstieg, also eine Instabilität („Flattern“). Eine übliche und zweckmäßige Auftragung ist der Verlauf von Frequenz und Dämpfung über der Fluggeschwindigkeit u_0 .

Die quadratische Matrixgleichung für ω führt dagegen schon für niedrige Dimensionen zu unübersichtlichen Verhältnissen und lässt sich - nach Kenntnis des Autors - auch approximativ nicht allgemein lösen.

Aus diesem Grund wird statt der Dämpfungsmatrix \mathbf{D} oft eine so genannte strukturelle Dämpfung angenommen. Diese wird über eine komplexe Steifigkeitsmatrix eingeführt:

$$(9) \quad \mathbf{D} = \mathbf{O}; \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + i \cdot \mathbf{K}_D \text{ mit} \\ |K_D(i, j)| \ll |K_0(i, j)|$$

Positive Werte der Zusatzterme $K_D(i, j)$ haben die Wirkung einer Dämpfung.

2.2. Analyse im Zeitbereich

Die Analyse im Zeitbereich integriert mit

$$(10) \quad \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = -q_0 \cdot \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$$

die Ausgangsgleichung, bei der für zahlreiche Geschwindigkeiten u_0 (und Flughöhen) die Dämpfung oder Anfachung der Lösung ausgewertet wird. Eine Stabilitätskarte der angefachten und gedämpften Lösungen schließt die Flattergrenze ein.

Die Vorgehensweise verlangt die gleichzeitige und separate numerische Integration der Luftkräfte in dem die Struktur umgebenden Fluid. Daraus ergeben sich prinzipielle Schwierigkeiten für die Genauigkeit der Lösung, weil die bereits erwähnte kinematische Randbedingung Werte für die Bewegung der Oberfläche des Körpers verlangt, die gleichzeitig aber erst das Ergebnis der Integration ist.

Einen Ausweg aus diesem Problem bietet die Möglichkeit, die Differentialgleichung (3) im Raum der physikalischen Koordinaten \mathbf{r} zu integrieren. Für Punkte auf der Oberfläche des umströmten Körpers ergeben sich von null verschiedene Luftkräfte. Bei dieser Vorgehensweise ist die gleichzeitige Integration der Variablen von Struktur und Fluid möglich. Die Integration ist entsprechend dem gewählten Verfahren genau, aber die Dimension des Gleichungssystems bleibt in der Größe von N zuzüglich der Anzahl der Variablen im Feld und lässt sich nicht reduzieren wie bei der Integration des modalen Systems (1). Damit ergeben sich wiederum andere Quellen für Fehler, die Einfluss auf die Phasengenauigkeit der Lösung haben.

2.3. Harmonische Analyse im Zeitbereich

Die harmonische Flatteranalyse im Zeitbereich **HAFIT** integriert Gleichung (1) im Zeitbereich mit dem Ansatz für die Luftkräfte

$$(11) \quad \mathbf{f}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = -q_0 \cdot [\mathbf{Q}_R(u_0, f_0) \cdot \mathbf{q}(t) \\ + k(u_0, f_0) \cdot \mathbf{Q}_S(u_0, f_0) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t)]$$

mit k als Differentialterm für die adäquate Verwendung des Imaginärteils einer einzelnen komplexen Luftkraftmatrix $\mathbf{Q}(u_0, f_0)$. Ohne Dämpfung \mathbf{D} unterscheidet sich die Gleichung nicht vom Ansatz für die Analyse im Frequenzbereich. Im Verlauf der Arbeit wird auf diese Übereinstimmung und auf die Besonderheiten der Zeitintegration noch eingegangen:

- Da mit der Lösung im Frequenzbereich ein unabhängiges Ergebnis vorliegt, kann die Integration im Zeitbereich hinsichtlich ihrer Genauigkeit überprüft werden.
- Ist die Genauigkeit bekannt, so lässt das Ergebnis mit Vorgabe der Dämpfung wiederholen. Damit erschließt sich eine Klasse von Lösungen, die aus der Analyse im Frequenzbereich nicht zu erhalten ist.
- Schließlich kann die Linearität in $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}$ aufgegeben werden. Anstelle harmonischer Luftkräfte kann ein beliebiges numerisches Verfahren für die Integration der Luftkräfte im Zeitbereich verwendet werden (CFD Verfahren).

3. EINFACHES MODELL

3.1. Struktur

An dem einfachen Modell EPLD3D einer Tragfläche in Bild 1 soll die Vorgehensweise demonstriert werden. Eine ebene Platte ist einseitig eingespannt und als FE-Modell berechnet. Die notwendigen Angaben sind an dieser Stelle nur kurz erwähnt, die Daten sind aber für eigene Studien interessierter Leserinnen und Leser auf der [Internetseite zu dieser Arbeit](#)² abgelegt und in Tabelle 1 zusammengestellt.

Das Modell EPLD3D hat $K = 77$ Knoten, von denen die sieben Knoten der Flügelwurzel mit allen sechs Freiheitsgraden eingespannt sind. Da nur die drei translatorischen Freiheitsgrade berücksichtigt sind, ergibt sich $N = 3(K-7) = 210$ für die Dimension von Gleichung (3). Die Daten sind nur für den eingespannten Flügel angegeben. Die gleiche Analyse kann für einen frei fliegenden Flügel durchgeführt werden und ergibt entsprechend veränderte Schwingungsformen.

² Die vollständige Adresse für alle Dateien ist im Hyperlink enthalten und lautet: <http://www.aniprop.de/dglr03/index.html> Statt *index.html* ist der jeweilige Dateiname einzusetzen.

Inhalt	Dateiname
Modellangaben	epld3d_info.txt
Liste der 77 Knoten	epld3d_node.list
Matrizen \hat{M}, \hat{K} (1.8MB)	epld3d_mk231.out
Matrizen M, K	epld3d_diagmk231.out
Moden $m_{ii}, ii = 1 \dots 10$	epld3d01m01.gif
Knoten+10 Eigenvektoren	epld3d_n77m10.inp
Mode 1 und 2 linearisiert	epld3d_n77m10_lin2.inp
ANSYS database (1.3MB) & results (0.13 MB)	epld3d01.db epld3d01.rst

Tabelle 1: Daten des FE-Modells EPLD3D im Internet und Größe von Dateien > 0.1MB.

Sind \mathbf{x}_k die Ortskoordinaten eines der $k = 1, \dots, K$ Knoten, so liefert die Liste der Moden, auf die in Tabelle 1 verwiesen wird, die in Bild 2 dargestellten Auslenkungen der Schwingungsformen als Werte $\mathbf{v}_n(\mathbf{x}_k)$. Schwingt das Modell bei einer Mode in der x-y-Ebene, muss zwangsläufig die x-Koordinate für die Konturlinien ausgewählt werden. Die Bewegung selbst wird beschrieben durch

$$(12) \quad \mathbf{v}_n(\mathbf{x}_k) \cdot q_{a,n} \cdot e^{i\omega_n t}.$$

Die zunächst beliebige Amplitude $q_{a,n}$ ergibt sich im Verlauf der Rechnung aus den Anfangsbedingungen für die Integration von Gleichung (1). Hinsichtlich der

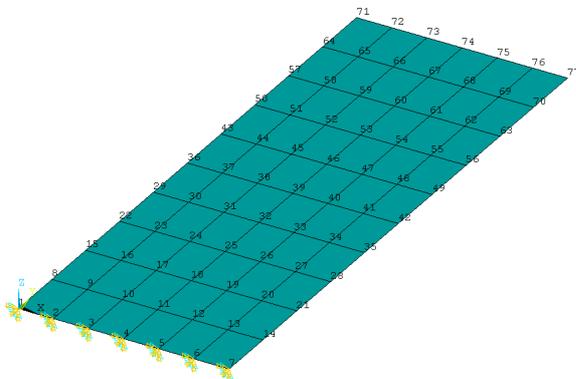


Bild 1: FE-Modell EPLD3D der ebenen Platte. Flügeltiefe $\ell = 0.36$ m, Spannweite $b = 1$ m. FE-Programm: ANSYS. Material: Aluminium 0.005 m, EX = 0.72000E+11 Pa, NUXY = 0.34000, DENS = 2700.0 kg/m**3, Elemente : SHELL63 6 x 10 (äquidistant verteilt).

Struktur ist die absolute Größe der Amplituden gleichgültig, weil die Differentialgleichung linear ist. Für die Bestimmung der Luftkräfte ist die Größe - zumindest indirekt - von Bedeutung, weil zum Beispiel die harmonischen Luftkräfte für unterschiedliche Amplituden durchaus sehr unterschiedlich sein können.

3.2. Aerodynamik

Bild 2 zeigt die beiden ersten Schwingungsformen, für die das Modell EPLD3D nachfolgend auf aeroelastische Stabilität untersucht wird. Die Untersuchung ist auch unter Einbeziehung der ersten zehn Schwingungsformen wiederholt und das Ergebnis ist in der Internetreferenz abgelegt.

Schwingt das Modell bei der Anströmgeschwindigkeit u_0 in einer der Eigenfrequenzen f_n , so entstehen instationäre Drücke auf Ober- und Unterseite, die charakterisiert werden durch die so genannte reduzierte Frequenz ω^* :

$$(13) \quad \omega_n^* = \frac{2\pi \cdot f_n \cdot (\ell/2)}{u_0}$$

In inkompressibler Strömung werden die Luftkräfte allein durch diese Kennzahl beschrieben, während in kompressibler Strömung neben der reduzierten Frequenz die Machzahl Ma als zweite Kennzahl hinzu kommt.

Die Frequenz muss nicht notwendig eine Eigenfrequenz sein, sondern kann eine beliebige andere Frequenz f_j sein, die durch erzwungenes Mitschwingen von einer äußeren Kraft aufgeprägt wird. Bei dem Modell EPLD3D gehen die Drücke direkt als Beiwerte $\Delta c_{p,j}(\mathbf{x}_k, t)$ der Druckdifferenzen ein in die Berechnung der generalisierten Luftkraft \mathbf{f} . Die Differenz sei so gebildet, dass positive Beiwerte auch positiven Auftrieb liefern. Für ein einzelnes Element ΔS_k der Oberfläche ist der Beitrag zu $\hat{\mathbf{f}}$:

$$(14) \quad \hat{\mathbf{f}}_{k,j}(t) = -q_0 \cdot \Delta c_{p,j}(\mathbf{x}_k, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_k) \cdot \Delta S_k$$

Werden nur translatorische Freiheitsgrade einbezogen, dann ist $\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k$. Nur an diesen Freiheits-

Mode	λ_n	f_n	m_{nn}	k_{nn}
1	726.	4.288	5.737017E-02	41.6533
2	2.331E+04	24.301	4.671202E-02	1089.06
3	2.854E+04	26.886	5.571947E-02	1590.04
4	2.290E+05	76.169	5.417506E-02	12408.3
5	2.351E+05	77.172	4.535644E-02	10664.1
6	7.962E+05	142.012	4.352062E-02	34650.0
7	9.021E+05	151.162	5.281217E-02	47640.5
8	1.905E+06	219.697	4.018804E-02	76578.0
9	1.998E+06	224.990	4.201565E-02	83964.5
10	2.537E+06	253.514	4.850293E-02	123064.

Tabelle 2: Liste der niedrigsten Eigenwerte λ_n , der zugehörigen Frequenzen f_n sowie der generalisierten Massen m_{nn} und Steifigkeiten k_{nn} des Modells EPLD3D.

graden können Drücke auf die Struktur einwirken. Die rotatorischen Freiheitsgrade nehmen keine Drücke auf. Bei einer komplexeren Struktur mit Knoten im Innern des umströmten Körpers haben

die Luftkräfte dort ebenfalls den Wert null. Gleichung (14) besteht aus genau N skalaren Komponenten, von denen aber im allgemeinen Fall zahlreiche den Wert null haben. Die Summe der Flächenelemente ΔS_k , auf die Drücke einwirken, muss natürlich genau die Oberfläche des Körpers ergeben:

$$(15) \quad \hat{\mathbf{f}}_j(t) = \sum_{k=1}^N \hat{\mathbf{f}}_{k,j}(t)$$

Damit keine Vorzeichenfehler bei den Luftkräften entstehen, müssen zunächst die Moden aus dem FE-Modell berechnet werden. Die kinematische Randbedingung bei der Lösung des Umströmungsproblems wird durch die Beiträge der einzelnen Moden zur kinematischen Geschwindigkeit definiert. Dies erschwert unter Umständen die Verwendung bereits vorliegender Luftkräfte.

Für die beiden ersten Moden des Modells EPLD3D sind die instationären Beiwerte der Druckdifferenzen mit zwei verschiedenen Verfahren berechnet worden. Bild 4 und Bild 3 zeigen die Funktion $\Delta \bar{c}_{p,j}(\mathbf{x}_k)$, aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil.

Vom physikalischen Modell her sollten beide Ergebnisse „genau“ übereinstimmen, aber die Lösungsverfahren sind etwas unterschiedlich.

Das erste Verfahren mit der Bezeichnung AEDS als Titel ist ein Panelverfahren höherer Ordnung des Autors. Der Lösungsansatz ist eine flächenhafte Wirbeldichte \mathbf{j}_F , deren Randbedingungen auf der Oberfläche des Körpers bereits im Ansatz der zugehörigen Integralgleichung für die Lösung des Umströmungsproblems enthalten sind. Sichtbar wird dies u.a. an der Tatsache, dass die Konturlinien der Druckverteilung nicht auf die Ränder zulaufen, weil in diese keine Wirbeldichte hineinlaufen darf (es gilt stets $\text{div } \mathbf{j}_F = 0$). Die Beiwerte sind bezogen auf die Amplituden $h_{0,tip} / (\ell / 2)$ für die Grundbiegung und $\alpha_{0,tip}$ für die Grundtorsion.

Das Verfahren in ZAERO ist ebenfalls ein Panelverfahren, das als *doublet lattice* Verfahren jedoch ohne Ansatz für die Wirbeldichte auskommt. Für vergleichbare Genauigkeit ist eine größere Anzahl an Panelementen erforderlich. Die Beiwerte sind in der Topografie der Schichtlinien fast gleich, haben aber geringfügig höhere Funktionswerte.

Zum besseren Vergleich der beiden Programme sind die beiden Moden verändert worden. Statt der tatsächlichen Schwingungsform nehmen die Grundbiegung und die Grundtorsion (um die $\ell / 2$ Achse) jeweils linear von der Wurzel zur Spitze zu. Die modifizierten Moden sind ebenfalls in Tabelle 1 notiert ([lin2.inp](#)). Da die Amplituden in den Ergebnissen von ZAERO eingerechnet sind, sind die

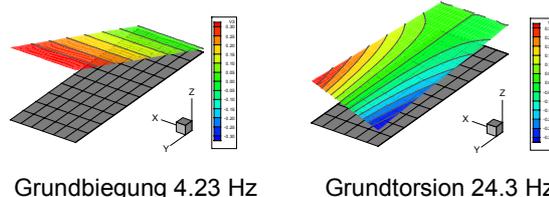


Bild 2: Die Moden \mathbf{v}_1 (Grundbiegung) und \mathbf{v}_2 Grundtorsion) des Modells EPLD3D als Konturlinien der Auslenkungen der z-Koordinate ([modifizierte Moden](#)).

Skalierungen in Bild 3 entsprechend geändert worden.

Die Auslenkung an der Flügelspitze ist für die Mode 1 $h_{0,tip} = 0.1926$, so dass $q_{a1} = 1.07$. Die Auslenkung für die Mode 2 an der Vorderkante der Flügelspitze ist $dz = 0.2889$. Daraus ergibt sich $q_{a2} \alpha_{0,tip} \approx \tan \alpha_{0,tip} = dz / (\ell / 2) = 1.605$. Durch analoge Rechnungen erhält man auch absolute Aussagen zu den übrigen Moden. Die Zahlenwerte in einem ausgewählten Referenzpunkt folgen aus der Tatsache, dass alle Moden auf die Länge eins normiert sind.

3.3. Generalisierte Luftkräfte

Die generalisierte Kraft $f_{m,j}(t)$, die bei einer Frequenz f_j an der Schwingungsform m wirksam ist, ergibt sich aus

$$(16) \quad f_{m,j}(t) = \mathbf{v}_m^T \cdot \hat{\mathbf{f}}_j(t).$$

Der hochgestellte Index T bezeichnet den Eigenvektor \mathbf{v}_m transponiert als Zeilenvektor. Zu den beiden Schwingungsformen und den zugehörigen Druckverteilungen sind die Beiwerte der generalisierten (modalen) Luftkräfte in Tabelle 3 angegeben.

	$\mathbf{Q}_{R,m,1}(\omega^*) + i \cdot \mathbf{Q}_{S,m,1}(\omega^*)$		$\mathbf{Q}_{R,m,2}(\omega^*) + i \cdot \mathbf{Q}_{S,m,2}(\omega^*)$	
AEDS	Real	Imag	Real	Imag
Mode 1	1.448E-3	-1.251E-2	-9.460E-2	-2.137E-2
Mode 2	7.798E-4	1.096E-02	8.364E-2	-1.191E-2
ZAERO				
Mode 1	1.438E-3	-1.318E-2	-9.942E-2	-2.209E-2
Mode 2	8.807E-4	1.114E-2	8.545E-2	-1.296E-2

Tabelle 3: Beiwerte der generalisierten Luftkräfte aus den Verfahren AEDS und ZAERO für die Grundbiegung und die Grundtorsion, $\omega^* = 0.2$.

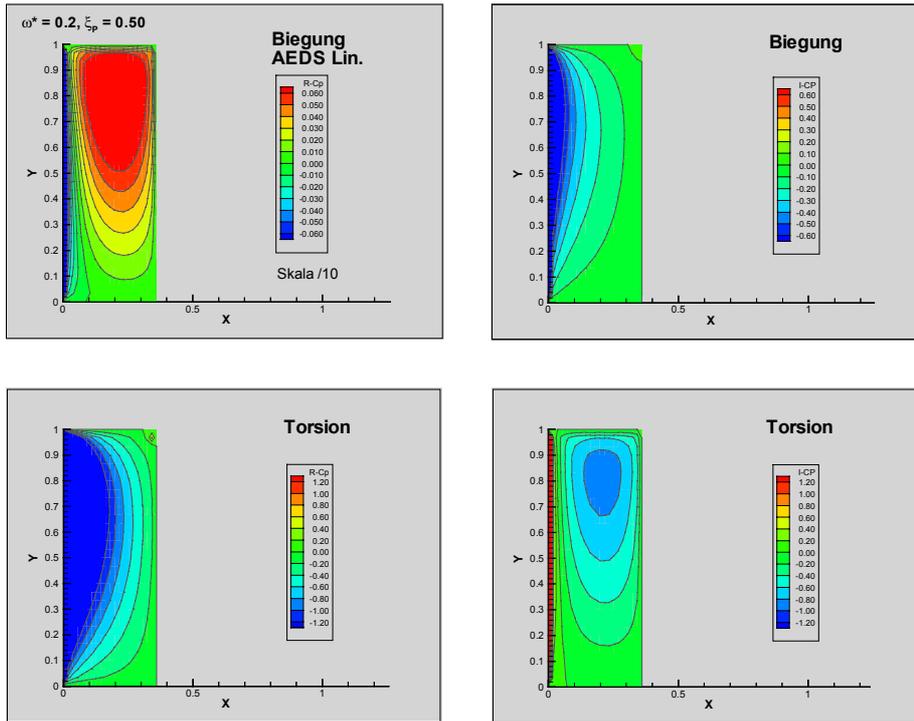


Bild 4: Die komplexe Funktion $\Delta \bar{c}_{p,j}(\mathbf{x}_k)$, aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil, für die beiden Schwingungsformen in Bild 2, $\omega^* = 0.2$ und inkompressible Strömung. Berechnungsverfahren ist ein Panelverfahren höherer Ordnung des Autors; Anzahl der Panel: 15 x 20 in Flügeltiefe und Spannweite. Bezug auf die jeweilige Amplitude.

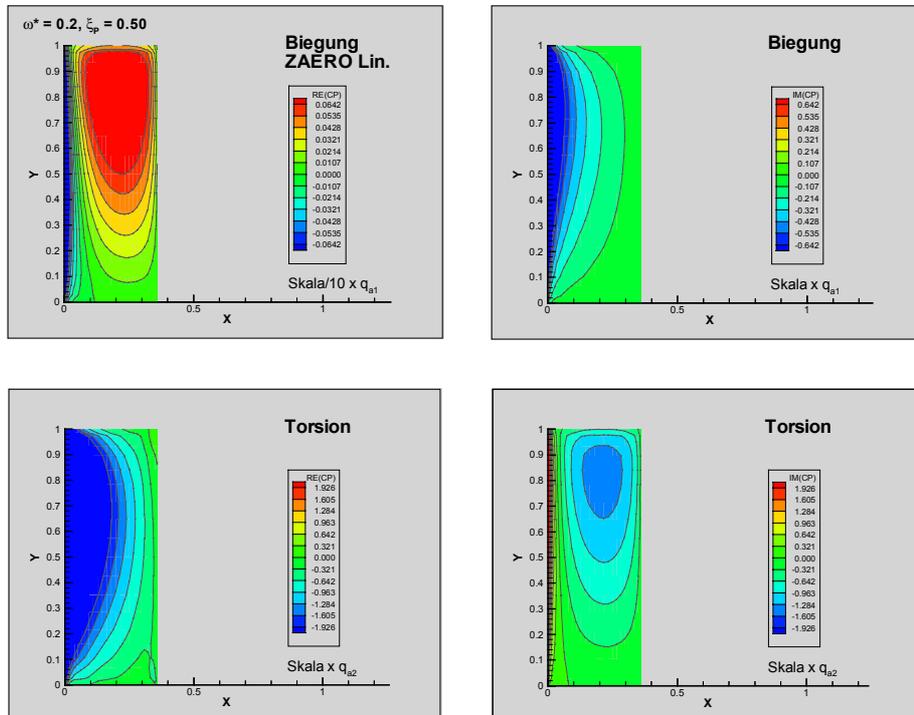


Bild 3: Die komplexe Funktion $\Delta \bar{c}_{p,j}(\mathbf{x}_k)$, aufgeteilt nach Real- und Imaginärteil, für die beiden Schwingungsformen in Bild 2, $\omega^* = 0.2$ und inkompressible Strömung. Berechnet mit dem kommerziellen Analyseprogramm ZAERO; Anzahl der Panel: 20 x 30 in Flügeltiefe und Spannweite. Skalierung der Konturlinien für den Vergleich mit Bild 4 um die jeweilige Amplitude vergrößert.

In diesen Beiwerten sind - abweichend von der sonst üblichen Definition von Beiwerten - bereits alle Faktoren in Gleichung (14) enthalten bis auf den Staudruck q_0 . Für ein Modell mit anderen Abmessungen sind die Werte ebenso verändert wie für eine andere Anzahl von Knoten. Insbesondere der letzte Punkt kann eine Quelle von Fehlern bei der Ermittlung der Beiwerte sein. Die normierten Eigenvektoren sind gekoppelt an die Dimension des Gleichungssystems (3). Wird dieses im Verlauf einer Entwicklung geändert, so verändern sich aus den nachfolgend aufgeführten Gründen auch die Beiwerte der generalisierten Luftkräfte.

Luftkraftverfahren liefern gewöhnlich Beiwerte von Druckverteilungen, wie sie in Bild 4 dargestellt sind. Um zu gleichen Zahlen wie in ZAERO (Tabelle 3) zu gelangen, sind folgende Schritte erforderlich:

- Zunächst sind die Druckverteilungen mit den Amplituden derjenigen Mode multipliziert worden, für die sie berechnet worden sind.
- Für eine Integration der Beiwerte ist die Anzahl der Knoten, an denen die Moden als Ergebnis der FE-Modellierung definiert sind, viel zu gering. Die Moden müssen für die Integration mit einem Interpolationsverfahren an jedem Punkt der aerodynamischen Oberfläche verfügbar sein. Diese Verfeinerung ist bereits bei der Erstellung der Luftkräfte notwendig.
- Integrand ist der örtliche Wert der normierten, interpolierten Eigenmode normal zur Oberfläche, der mit dem Druckbeiwert multipliziert ist. Die Integration über die Oberfläche geschieht so dann mit der notwendigen Genauigkeit.
- Die Ausgangsgleichungen von ZAERO nehmen nicht auf die Tatsache Rücksicht, dass die Luftkräfte in Gleichung (6) Reaktionskräfte sind und folglich stets mit einem negativen Vorzeichen in der Bewegungsgleichung (3) auftreten müssen.

Dass die Werte im Vorzeichen übereinstimmen, ist das Ergebnis der Rechnung mit den dargestellten Daten der Moden und der Druckbeiwerte. Das negative Vorzeichen in Gleichung (6) ist bereits berücksichtigt bei der Darstellung der Druckbeiwerte aus dem Programm AEDS³.

Für das Programm HAFIT sind die Beiwerte der generalisierten Luftkräfte aus der Lösung von ZAERO genommen worden, um vergleichbare Resultate zu erzielen.

³ Bei konsequenter Aufstellung der Integralgleichung bzw. des zeitlichen Integrationsverfahrens für die Umströmung (CFD-Verfahren) treten die generalisierten Kräfte mit entgegengesetztem Vorzeichen auf.

Die Daten in Tabelle 3 gehen als Werte in die Funktion in Gleichung (11) ein, mit der das Programm HAFIT arbeitet. Die Abhängigkeit der Luftkräfte von Geschwindigkeit und Frequenz drückt sich durch die Angabe der reduzierten Frequenz aus, für die sie gelten. Wie bereits erwähnt, tritt in kompressibler Strömung noch die Machzahl als unabhängiger Parameter hinzu.

4. INTEGRATION IM ZEITBEREICH

Die numerische Integration wird mit dem gut dokumentierten Integrationsprogramm DIVPAG der Programmbibliothek [IMSL](#) durchgeführt. Die IMSL ist für die gängigen Betriebssysteme und Compiler verfügbar. Das vom Autor entwickelte Programmkonzept **HAFIT** liegt für zwei und mehr Dimensionen vor. Für die Version FLT2DQ.FOR (zwei Freiheitsgrade) gibt es eine öffentliche zugängliche [Informationsseite](#)⁴. Über diese Seite kann der Quellcode dieses Integrationsprogramms angefordert werden. DIVPAG löst ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zu gegebenen Anfangswerten. Dazu wird das System (1) von zweiter Ordnung zunächst überführt in ein System erster Ordnung mit doppelter Dimension. Das Programm erwartet die Vorgabe einer Genauigkeit. Wird diese nicht erreicht, wird eine Fehlermeldung ausgegeben.

```

1> 0. <t_init ) Time
2> 2. <t_end ) interval
3> 2001 <n_intvals
4> -40. <y0(1) (x1s) )Ini-
5> 0.0 <y0(2) (x2s) )tial
6> 1.00 <y0(3) (x1) )values
7> 1.00 <y0(4) (x2) )
8> 0.057370<m1
9> 0.046712<m2
10> 0.0 <sm> 0.0 <fm
11> .0000 <d1 ) Damping
12> .0000 <d2 )
13> 41.653 <k1> 0.0 <km
14> 1089.1 <k2
15> 1d-05<tolerance
16> 1 <method
17>..... Aerodynamic data
18> -7080. <q0
19> 0.001438 <->-0.01317 < CQ11
20>-0.09942 <->-0.02209 < CQ12
21> 0.0008807<-> 0.011136 < CQ21
22> 0.085454 <->-0.012958 < CQ22
23**** End of all input data ****
    
```

Tabelle 4: Eingabedaten für das Programm HAFIT in der Version FLT2DQ.

⁴ http://www.ae.go.dlr.de/~send/publicinfo/fit2dq_readme.pdf

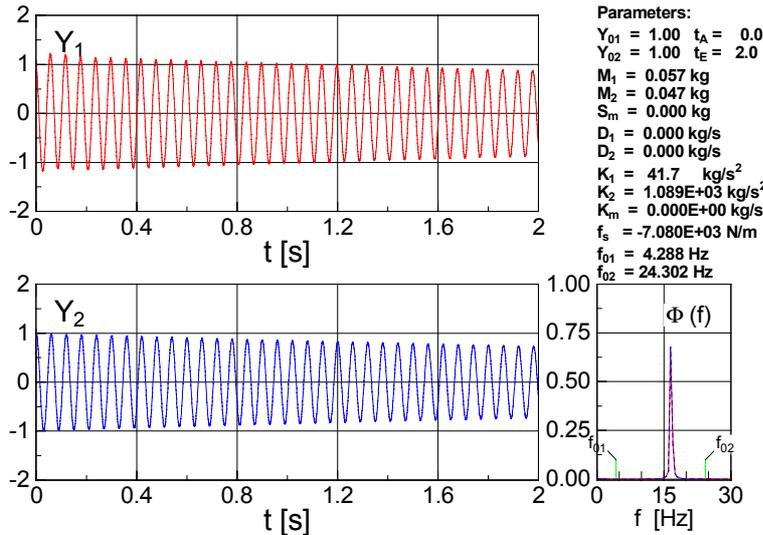


Bild 5: Lösung der Gleichung (1) für zwei Freiheitsgrade mit HAFIT zu den Parametern in Tabelle 4. Y_1 und Y_2 sind die Auslenkungen der Moden. Das kleine Bild zeigt das normierte Energiespektrum.

$$(17) \quad k(u_0, f_m) \cdot \dot{q}_m = \frac{1}{\omega_m^*} \cdot \dot{q}_m$$

Zeigt nun die Fourieranalyse der Lösung enge Frequenznachbarschaften f_x zwischen einer oder mehreren Lösungspaaren, so wird mit dieser Frequenz eine neue reduzierte Frequenz bestimmt und der Integrationsvorgang damit wiederholt:

$$(18) \quad \omega_x^* = \frac{2\pi \cdot f_x \cdot (\ell/2)}{u_0}$$

Die verkürzte Schreibweise in Gleichung (11) ist daher so zu verstehen, dass das k für jede einzelne Komponente einen anderen Wert hat.

4.1. Lösung im Frequenzbereich

Die komplexe Eigenwertgleichung (7) wird für die beiden niedrigsten Eigenwerte zum Vergleich auch im Frequenzbereich gelöst.

Tabelle 4 zeigt den wesentlichen Teil der Eingabedaten, in denen die hier eingeführten Größen leicht erkannt werden können. Die Zahl $n_intvals$ der Zwischenpunkte dient der Fourieranalyse hat keinen Bezug zur Genauigkeit der Lösung. Das Programm integriert zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten entsprechend der verlangten Genauigkeit.

Der Term $k(u_0, f_j)$ in Gleichung (11) bestimmt sich aus der Tatsache, dass der Imaginärteil $Q_{s,m,j}(u_0, f_j)$ der jeweiligen Luftkraft proportional zur Geschwindigkeit ist. Für eine einzelne Geschwindigkeit wird deshalb zunächst eingesetzt:

Dies ist auf zweierlei Weise möglich. Der Autor verwendet das algebraische Programm REDUCE, mit dem die Lösung der Gleichung einschließlich des Anfangswertproblems programmiert wurde. Der große Vorteil des algebraischen Programms ist, dass die Beschränkung auf endliche Stellenbreite wie bei den üblichen Programmiersprachen entfällt. Man kann eine beliebige Stellenbreite für die Gleitkommazahlen vorgeben und damit die Überprüfung einer Lösung durchführen.

q_0 [N/m**2]	u_0 [m/s]	f_1 [Hz]	d_1 [1/s]	f_2 [Hz]	d_2 [1/s]	R-ev21 [-]	I-ev21 [-]	R-ev22 [-]	I-ev22 [-]
372.63	24.92093	23.94423	0.05327	4.26771	0.26177	32.34859	-7.16401	0.00032	0.00405
745.26	35.24351	23.58170	0.10513	4.26280	0.54096	15.68061	-3.46496	0.00067	0.00836
1117.89	43.16431	23.21408	0.15525	4.27660	0.83563	10.12437	-2.23510	0.00104	0.01295
1490.53	49.84186	22.84117	0.20325	4.31109	1.14309	7.34604	-1.62277	0.00143	0.01785
1863.16	55.72489	22.46276	0.24864	4.36713	1.46042	5.67886	-1.25767	0.00184	0.02309
2235.79	61.04356	22.07863	0.29087	4.44450	1.78502	4.56727	-1.01639	0.00226	0.02870
2608.42	65.93458	21.68860	0.32928	4.54212	2.11497	3.77316	-0.84608	0.00268	0.03473
2981.05	70.48703	21.29249	0.36308	4.65849	2.44924	3.17748	-0.72031	0.00308	0.04123
3353.68	74.76278	20.89016	0.39133	4.79194	2.78768	2.71412	-0.62445	0.00345	0.04825
3726.32	78.80689	20.48156	0.41289	4.94085	3.13087	2.34343	-0.54975	0.00375	0.05584
4098.95	82.65337	20.06674	0.42645	5.10370	3.48003	2.04018	-0.49065	0.00395	0.06408
4471.58	86.32863	19.64597	0.43041	5.27907	3.83688	1.78762	-0.44350	0.00397	0.07303
4844.21	89.85368	19.21976	0.42296	5.46548	4.20356	1.57415	-0.40577	0.00375	0.08278
5216.84	93.24557	18.78906	0.40200	5.66130	4.58252	1.39158	-0.37570	0.00316	0.09340
5589.47	96.51834	18.35539	0.36526	5.86446	4.97645	1.23394	-0.35198	0.00207	0.10496
5962.11	99.68371	17.92106	0.31044	6.07232	5.38805	1.09684	-0.33366	0.00026	0.11750
6334.74	102.75162	17.48930	0.23544	6.28139	5.81978	0.97703	-0.31994	-0.00248	0.13101
6707.37	105.73054	17.06436	0.13884	6.48728	6.27339	0.87203	-0.31013	-0.00642	0.14541
7080.00	108.62780	16.65132	0.02044	6.68484	6.74940	0.77998	-0.30358	-0.01184	0.16051
7452.63	111.44978	16.25555	-0.11830	6.86870	7.24660	0.69936	-0.29961	-0.01894	0.17604
7825.26	114.20204	15.88192	-0.27409	7.03403	7.76190	0.62890	-0.29755	-0.02785	0.19161
8197.89	116.88951	15.53393	-0.44220	7.17742	8.29071	0.56744	-0.29672	-0.03854	0.20681
8570.53	119.51657	15.21323	-0.61719	7.29732	8.82776	0.51386	-0.29656	-0.05085	0.22129
8943.16	122.08711	14.91965	-0.79390	7.39403	9.36793	0.46713	-0.29660	-0.06451	0.23475

Tabelle 5: Parameterstudie für die Eigenwerte und Eigenvektoren bei zunehmendem Staudruck q_0 .

Im Ergebnis zeigt sich, dass die Güte der Integration mit steigenden Eigenfrequenzen ab- und der Rechenaufwand erheblich zunimmt. Für wenige Freiheitsgrade und niedrige Frequenzen sind die numerischen Lösungen praktisch exakt, wie der Vergleich der Lösung des algebraischen Programms REDUCE in Tabelle 7 mit einer ausgewählten numerischen Lösung in Tabelle 5 zeigt.

```

q0 := 7080.0 N/m²

Frequenzen:
f1 = 16.6513153914 + 0.0204443391293*i
f2 = 6.68484072637 + 6.74940461531*i

Eigenvektoren
EV1 = 0.779978748714 - 0.30358004441*i
EV2 = -0.0118378517029 + 0.160513434006*i

Anfangswerte: Amplituden:
X1 := 1      Betrag (EV1/EV2)
X2 := 1      lambda = 1.19477835506
X1S := -40   Phase (EV1-EV2)
X2S := 0     kappa = 21.2667732188
    
```

Tabelle 7: Vergleichsergebnis mit dem algebraischen Programm REDUCE für ein ausgewähltes Ergebnis in Tabelle 5 und die Integration im Zeitbereich.

Die zweite Möglichkeit der Lösung im Frequenzbereich ist mit Hilfe von Programmen aus der IMSL. Tabelle 5 zeigt, in welcher Weise zunehmender Staudruck einen Einfluss auf die aeroelastische Stabilität des Modells EPLD3D hat. Bei einem Staudruck von 7080 N/m² ist die Flattergrenze fast erreicht. Wie auch Bild 5 mit der numerischen Integration zeigt, ist die Lösung nur noch schwach gedämpft.

- Die Ergebnisse sind mit einer einzigen Luftkraftmatrix berechnet und sie ändern sich nur unwesentlich, wenn eine solche Matrix für die ermittelte reduzierte Frequenz nachberechnet wird.

4.2. Lösung im Zeitbereich

Die Lösung der Integration im Zeitbereich für die Eingabedaten in Tabelle 4 ist in Bild 5 dargestellt. Wie schon erläutert, wird die Lösung in zwei aufeinander folgenden Integrationen ermittelt. Die Analyse der Phasenlage und des Amplitudenverhältnisses geschieht mittels einer Fourieranalyse. Dazu wird das Programm DFFTRF der IMSL verwendet. Das Ergebnis ist in Tabelle 6 dargestellt.

An dieser Stelle sei auf eine Besonderheit der Zeitintegration hingewiesen. In Tabelle 4 sind die Anfangswerte ($t = 0$) für die Auslenkungen der beiden Moden in den Zeilen 6 und 7, und die Anfangswerte für die Geschwindigkeiten in den Zeilen 4 und 5 angegeben. Der Wert $y(1) = -40$

```

Time history of the solution

*** Strong coupling detected:
Frequency margin  0.000 Hz

f [Hz]  lambda  kappa  Y1_0  Y2_0
16.500  1.2280  15.29  1.60  1.31

Second run with the coupling frequency.
*** Strong coupling detected:
Frequency margin  0.000 Hz

f [Hz]  lambda  kappa  Y1_0  Y2_0
16.500  1.1923  21.66  0.84  0.70

f [Hz]  rho[kg/m3]  x_ref[m]  u0[m/s]  omred  q0 [N/m2]
16.500      1.20      0.36  108.63  0.172  7080.

Tabelle 6: Ergebnis für Phasenlage und Amplitudenverhältnis aus der Integration im Zeitbereich mit dem Programm FLT2DQ.
    
```

erscheint willkürlich und nicht gleich nachvollziehbar. Er ist sozusagen „experimentell“ ermittelt worden (bei Kenntnis der analytischen Rechnung ist er natürlich bekannt). Wenn dieser Wert auf null gesetzt wird, starten beide Moden mit der gleichen Phasenlage κ_a (*kappa*) und dem Amplitudenverhältnis $\lambda_a = 1$ (*lambda*). Tatsächlich stellt sich nach kurzer Integrationszeit der Wert der Phasenlage wie des Amplitudenverhältnisses in der Rechnung ein; zu Beginn gibt es aber einige heftige Schwankungen im Lösungsverlauf. Nur durch die Vorgabe einer Geschwindigkeit für eine der beiden Moden vollzieht sich die Integration so glatt wie in Bild 5.

4.3. Vergleich mit ZAERO

Der Vergleich mit dem Analyseprogramm ZAERO ist interessant, weil das Produkt neben NASTRAN eines der ganz wenigen kommerziellen Programme für die aeroelastische Stabilitätsanalyse ist. Nun geht die Leistungsfähigkeit von ZAERO weit über einen solchen einfachen Modellfall hinaus, wie er in der vorliegenden Arbeit aus methodischen Gründen behandelt wird, aber die Verfahren ändern sich natürlich nicht.

Verfahren		ZAERO g-Methode	ZAERO k-Methode	HAFIT
u_{Fl}	[m/s]	110.8	104.6	108.5
f	[Hz]	16.18	17.06	16.5
ω^*	[-]	0.165	0.185	0.171

Untersuchung eines eingespannten Halbflügels für zwei Moden ($Ma = 0.2$). Biegung 4.23 Hz; Torsion 24.3 Hz. Genauigkeit **HAFIT** für den Staudruck: $q_0 = 7080 \pm 5 \text{ Nm}^{-2}$, Integrationszeit $t = 10 \text{ s}$ ($\Delta f = \pm 0.1 \text{ Hz}$).

Tabelle 8: Vergleich der Flattergrenzen.

Die Datei [epld3d_asym02.inp](#) enthält die Eingabedaten für ZAERO und verwendet ihrerseits die angegebene [Modendatei](#). Die beiden Verfahren g-Methode und k-Methode, die in ZAERO verwendet werden, sind im [Theoretical Manual](#) von ZAERO ausführlich dargestellt und sollen an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden.

Der Vergleich mit HAFIT ist zahlenmäßig in Tabelle 8 und grafisch in Bild 6 dargestellt. Man muss feststellen, die selbst in diesem einfachen Modellfall die Verfahren einen größeren Abstand untereinander haben als zum Ergebnis von HAFIT.

Schließlich ist in Bild 7 das typische Flatterverhalten dargestellt. Ohne Luftkraft schwingen die Moden in ihren Eigenfrequenzen. Mit wachsendem „Durchgriff“ der Luftkräfte kommt es zunächst zu einer starken Dämpfung, dann zu einer Frequenzverschiebung. Die Moden enthalten Anteile erzwungener Schwingungen durch Nachbarmoden. Vor dem Flatterpunkt werden die instabilen Moden von einer einzigen Schwingfrequenz dominiert.

Die **Ergebnisse für 10 Moden** unterscheiden sich nicht wesentlich von den Ergebnissen für zwei Moden. Die Daten zu dieser Untersuchung und weitere Informationen sind auf der [Internetseite](#) zu dieser Arbeit zu finden.

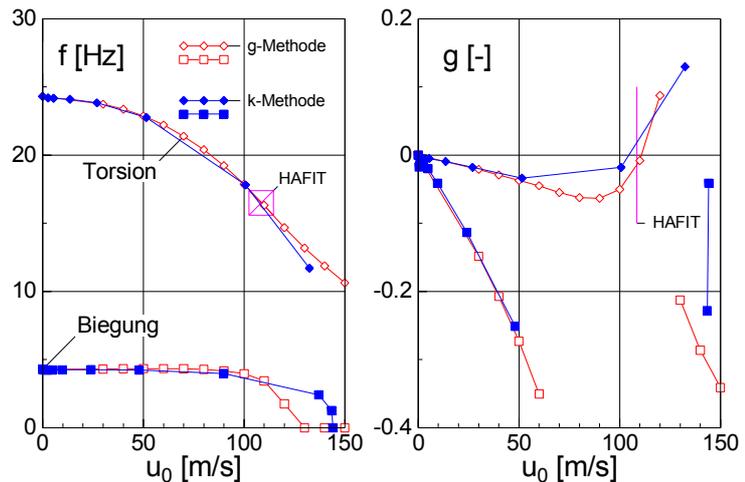


Bild 6: Grafische Darstellung des Vergleichs der Flattergrenzen zwischen dem Analyseprogramm ZAERO und HAFIT.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird belegt, dass die Ergebnisse einer Stabilitätsanalyse im Frequenzbereich in jeder Hinsicht mit den Ergebnissen aus einer Integration im Zeitbereich verglichen werden können.

Damit ist es möglich, moderne CFD-Verfahren, die nur im Zeitbereich arbeiten, sehr genau mit den Ergebnissen von Grenzfällen zu vergleichen, für die Analysen im Frequenzbereich vorliegen. Dies betrifft insbesondere auch die Genauigkeit der Integration im Zeitbereich bei der Kopplung von Fluid und Struktur.

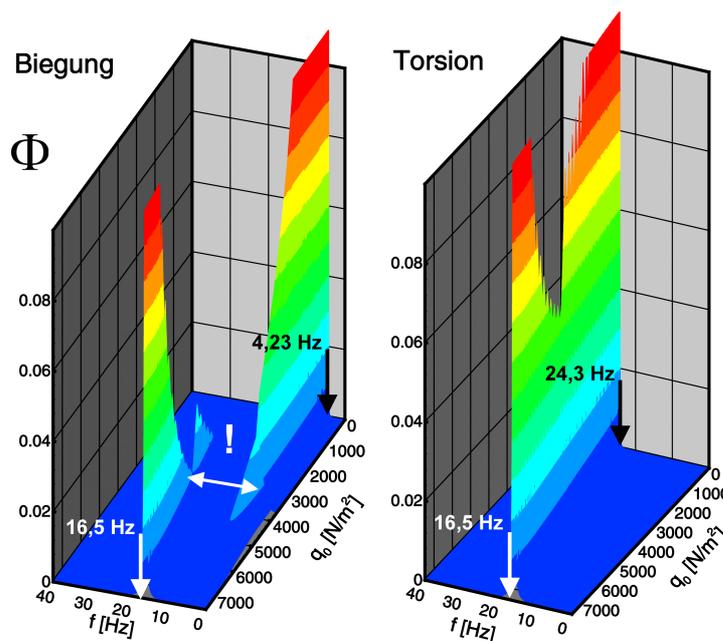


Bild 7: Verteilung der Schwingungsenergie Φ auf die beiden Moden mit wachsendem Staudruck.